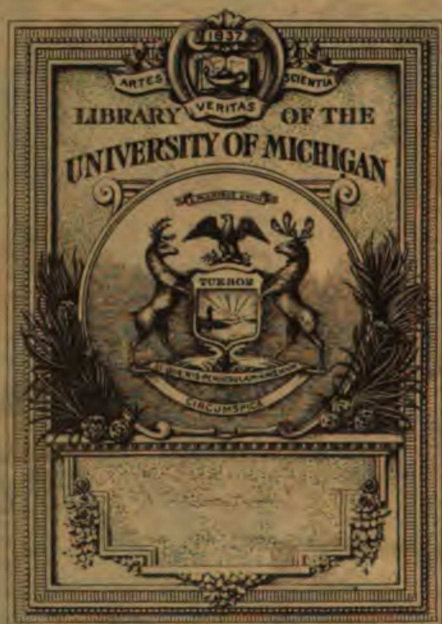

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



A R. Manduit

ELEMENS

DES SECTIONS CONIQUES.

LES ELEMENS
DES
SECTIONS CONIQUES;
DE'MONTRE'ES PAR SYNTHESE;

Ouvrage dans lequel on a renfermé le petit Traité des Sections Coniques de M. DELAHIRE.

*Par M. M***, Professeur de Mathématiques.*

Mauduit



A PARIS;

Chez DESAINT & SAILLANT Libraires, rue Saint Jean-de-Beauvais, vis-à-vis le College.

M. DCC. LVII.

Avec Permission & Privilege du Roi.

PRÉFACE

En forme de Discours sur la meilleure manière d'étudier les Mathématiques relativement aux Places que l'on doit occuper.

Quel doit être l'objet de l'étude des Mathématiques.

SI l'on ne se proposoit que de multiplier les connoissances qu'on peut acquérir sur les propriétés de la grandeur considérée en général & dans ses différentes espéces ; la méthode la plus courte & la plus générale seroit assurément celle dont il faudroit faire usage dans l'étude des mathématiques. Mais il s'en faut beaucoup que ce soit là le cas où se trouvent la plus part de ceux qui consacrent aujourd'huy quelque tems à cette science. Destinés presque tous à des occupations où ils ne feront que peu d'usage des vérités purement géométriques ; il est, ce me semble, évident que ces mêmes vérités ne doivent pas être le seul objet de leurs recherches. Outre les avantages sans nombre que nous procurent les Mathématiques par une application directe à tous les Arts curieux & nécessaires ; il en est un plus intéressant pour le plus grand nombre de ceux qui veulent au moins avoir une connoissance suffisante

des principaux éléments ; c'eſt peut-être même le ſeul qu'ils doivent enviſager, je veux dire l'Art du raiſonnement qui eſt eſſentiel à tous les ouvrages de cette nature. Les Mathématiques ne ſont redevables qu'à elles-mêmes du crédit qu'elles ont aujourd'huy. L'ambition de devenir ſçavants, le deſir de parvenir à connoître les forces de l'eſprit humain & de fixer les bornes de ſon intelligence, tous ces motifs ſeroient encore de foibles raiſons de préférer cette ſcience à toutes les autres. Tout nous invite à connoître la vérité, & à la préſenter aux autres dans ſon plus grand éclat ; mais l'un & l'autre n'eſt pas également facile. Comment pouvoir diſſiper les nuages qui l'environnent ou par l'intérêt & la malice, ou par la complication des queſtions qui la renferment ? Comment démêlér le vrai d'avec le faux, pour le faire connoître ſeul ; ſi l'on ignore l'art de raiſonner & de convaincre ; & quelle étude plus propre que celle des Mathématiques pour nous l'apprendre ? C'eſt une logique théorique & pratique en même tems, puiſque, nonſeulement elle nous donne des regles pour raiſonner avec préciſion, mais qu'elle nous en fait contracter l'heureuſe habitude, en nous mettant dans la néceſſité de ne donner notre conſentement qu'à ce que nous conçevons

Cet objet eſt l'Art du Raiſonnement, pour la plus part de ceux qui les étudient.

évidemment. C'est ainsi que les Mathématiques sont applicables même dans la vie civile, pourvû qu'on étudie plus-tôt la méthode & la chaîne des raisonnements, que les différentes parties qui peuvent en être l'objet; & qu'on joigne à cette étude celle des autres hommes qui est toujours indispensable pour former un vrai philosophe. C'est le sentiment des plus grands Géometres, d'après M. *Descartes* qui se dégoutoit quelquefois de ses découvertes, lorsqu'il ne pouvoit les appliquer au bien de la société. M. *S'Gravesande* se plaint de ce que l'on s'occupe plûtot de la solution des problêmes, que de leur nature; sans doute parce que cette derniere partie étant plus métaphysique que la premiere, seroit aussi plus propre à former le jugement. Il n'est pas moins convaincu de la nécessité de joindre la connoissance des hommes à celle dont nous parlons; & décide clairement que ce n'est pas se rendre propre la méthode des Géometres, que de raisonner continuellement sur la grandeur, sans passer au de-là. * On peut encore

Nécessité d'appliquer l'étude des Mathématiques au bien de la société.

*(*Mathesis*) Quæ inquirendo vero in scientiis reliquis etiam in vitâ civili magni usûs est; si modo aliarum scientiarum aut ipsorum hominum cognitio cùm Mathesi conjungatur. Qui enim, dum Mathesi animum applicat, cætera negligit; non propriè Methodum Mathematicam addicit. S'G. *Pref. Element. Matheseos universalis.*

voir cette vérité détaillée & démontrée avec toute la justesse possible, dans la Préface du cours de Mathématique de M. *Wolf*.

Différentes Classes de ceux qui étudient les Mathématiques. Maniére de les étudier selon la classe à laquelle on appartient.

Plus les avantages qu'on retire des Mathématiques sont considérables; plus cette science a de rapports avec les autres qui semblent n'être ainsi unies entr'elles, que pour faire voir la liaison intime qu'elles ont avec celle dont nous parlons; plus il est important de connoître comment il faut se conduire dans cette étude. Pour cela, il faut d'abord discuter à fond la nature des méthodes que l'on enploye; & ensuite distinguer parmi ceux qui s'y appliquent, différentes Classes, selon les objets qu'ils ont en vue. Pour commencer par cette derniere partie, je fais attention que de tous ceux qui étudient la Géométrie, les uns sont destinés à faire un usage continuel de ce qu'ils ont appris, & les autres ne se proposent que de former leur esprit, pour se rendre plus propres à remplir des fonctions qui quoiqu'étrangeres aux Mathématiques, éxigent cependant un jugement solide, & une certaine précision géométrique; ce qui forme deux Classes principales auxquelles on peut ramener toutes les autres. Les premiers ont besoin non-seulement de connoître avec une entiere évidence les principes des sciences qu'ils

veulent approfondir ; mais il leur faut des méthodes pour diminuer le travail, pour faire des progrès plus rapides ; en un mot pour découvrir ce qu'ils ignorent par les rapports des grandeurs connues avec les inconnues. Il eſt viſible que cette partie n'eſt pas moins eſſentielle au Phyſicien qu'au Géometre, & l'on ne peut aller loin dans l'art de connoître la nature ; ſi l'on n'eſt également habile dans les expériences que l'on fait pour l'interroger, & dans l'analyſe & la comparaiſon de leurs réſultats, pour découvrir de nouvelles propriétés. Souvent un Phyſicien Géometre après avoir déterminé les principes fondamentaux de ſa Théorie, s'épargne par la juſteſſe de ſes raiſonnements, une infinité d'expériences inutiles dans leſquelles les autres donnent au hazard, en perdant leur temps ſans être plus avancés. La plus part des Ingénieurs, ſur tout ceux qui ſe deſtinent à la conduite des travaux militaires ou civiles, doivent évidemment avoir des connoiſſances très-étendues ſur la Phyſique, la Méchanique, & ſur tout ce qui a rapport aux Fluides & aux Choc des corps : ainſi ils ſont dans le cas, dont nous venons de parler; c'eſt-à-dire qu'ils ſeront habiles à proportion du plus ou moins de connoiſſances qu'ils auront dans toutes ces parties, par le ſecours des Mathé-

matiques, dont elles dépendent. On peut encore mettre dans cette Classe ceux qui par un goût décidé, joint à une grande pénétration, se sont déterminés à suivre entierement l'étude des Mathématiques : mais il seroit superflu de vouloir instruire ici des personnes guidées par le genie même de la Géométrie, & vrayement nées pour éclairer les autres. Ce même goût, dont l'essence est de rechercher en tout la vérité, ne leur permet pas d'ignorer aucune des voies qui peuvent y conduire. A peine ont-ils fait les premiers pas, qu'ils essayent déja leurs forces, & commencent à découvrir lorsque les autres sont tout au plus en état de concevoir.

Examen particulier de ce qui est nécessaire, pour ceux de la seconde Classe, qui est la plus étendue.

Pour ceux de la seconde Classe, c'est-à-dire, ceux qui sans se destiner à aucune partie des mathématiques leur consacrent cependant quelques moments, pour se former un esprit solide & judicieux ; il est évident qu'ils doivent s'appliquer uniquement à rasonner juste ; qu'ils doivent étudier les méthodes plûtot en Métaphysicien qui discute les principes sur lesquels elles sont appuyées ; & la maniére dont elles remplissent leur objet ; qu'en Géometre, qui ne s'en sert que comme d'un instrument pour découvrir la vérité. Il n'est pas moins visible qu'il ne s'agit pas pour eux d'apprendre beaucoup en peu de temps,

mais de rechercher en tout l'évidence & la certitude qui font les deux fources d'où dérive la juſteſſe du raiſonnement : en un mot, il faut qu'ils regardent plûtot l'enchainement des vérités, & la force qu'elles en retirent, que ces vérités elles-mêmes dont un grand nombre pourroient leur devenir inutiles ; & fur tout, comme nous l'avons déja dit, qu'ils tâchent d'appliquer le fruit de leurs connoiſſances au bien de la ſociété, à laquelle ils appartiennent. C'eſt pour cette ſeconde Claſſe particulierement, qu'il faut faire choix des méthodes, puiſque leurs ſuccès dépendent plus de la maniére dont ils feront conduits que de ce qu'ils auront appris.

On peut admettre en général deux parties eſſentielles dans les Mathématiques, quelque ſoit la méthode dont on fait uſage ; l'une peut être appellée une partie purement intellectuelle, & l'autre une partie purement méchanique. Les Démonſtrations des opérations ou des propoſitions, la recherche des propriétés des Equations ou des figures que l'on examine, la diſcuſſion des différents ſens dont une queſtion eſt ſuſceptible, l'élégance des conſtructions, en n'y enployant que le moins de lignes qu'il eſt poſſible ; tout cela dépend de la ſagacité de celui qui démontre ou qui recherche la vérité. Les opérations

Deux parties eſſentielles dans l'etude des Mathématiques.

au contraire & tout ce qui y a rapport ; considéré comme tel, peut être regardé comme une partie méchanique, qui ne demande d'autre talent qn'une certaine habitude qui dépend plus de l'éxercice que du jugement.

Comparaison des Méthodes Analytique & Synthétique.

Tout le monde sçait en général qu'il y a deux deux méthodes en usage dans les Mathématiques, l'analyse & la synthese. Mais tous ne connoissent pas également ce qui différencie essentiellement l'une de l'autre. On remarquera d'abord que comme on ne peut démontrer la vérité sans faire quelqu'opération ; (*il ne s'agit pas des axiomes*) il y aura dans la synthese, comme dans l'analyse, une partie intellectuelle & une partie méchanique ; ainsi la synthese doit avoir son calcul comme l'analyse. Ce calcul est ordinairement fondé sur les proportions & leurs différentes combinaisons, dans ce qu'on appelle pure synthese. La différence de ces deux méthodes consiste donc dans la maniére, dont chacune procede à découvrir ou à démontrer la vérité. Celle-ci appuyée sur des principes évidents ou des propositions clairement démontrées, marche d'un pas lent mais assuré à la démonstration des vérités qu'elle annonce. Elle ne parle que par théorêmes, & tous ses pas sont éclairés par le flambeau de l'évidende. Celle-ci

au contraire suppose d'abord ce qui est en question, & selon que la chaine de ses conséquences la conduit à quelque vérité où à quelqu'absurdité, elle en conclud la vérité ou la fausseté de son hypothese. Comme cette chaîne pourroit quelque fois devenir fort longue, il faut de nécessité que la méthode analytique tâche de resserrer le plus qu'il est possible ses expressions, & c'est de là que résulte le calcul algébrique, qu'il faut bien distinguer de l'analyse proprement dite, quoiqu'on lui donne quelque fois ce nom : pour éviter toute discussion, nous l'appellerons *Analyse algébrique*. Quoique l'Analyse tâche d'abréger ses opérations, & que la Synthese procede plus lentement, il ne faut pas cependant s'imaginer que l'on n'aura jamais dans la synthese des constructions plus simples & plus élégantes que celles qui se déduisent de l'Analyse algébrique. Il y a des cas où il faut sçavoir s'arrêter, & dans lesquels à l'aide de quelques réflexions, qui semblent quelque fois étrangeres à la question on vient à bout d'une solution qui auroit été d'une longueur insupportable, si l'on eut calculé jusqu'au bout.

Une autre différence remarquable entre la Synthese & l'analyse, cest que la premiere ne peut souvent reconnoître la vérité d'une proposition, sans une longue

Différence remarquable des deux méthodes. Avantages &

Inconvénients de chacune en particulier.

chaîne de propositions précédentes ; & que la seconde ordinairement n'employe que peu de principes, & peut s'appliquer à toutes sortes de questions détachées. C'est par là que l'Analyse est à la fois supérieure & inférieure à la synthese ; supérieure, par sa généralité & la promptitude de ses opérations ; inférieure, en ce que ne raisonnant que sur des objets détachés les uns des autres, l'esprit est privé du plaisir de contempler cette chaîne non interrompue, qui unit toutes les vérités ensemble, pour faire voir les rapports qu'elles ont entr'elles. Il suit encore de cette différence, que la synthese est réellement la méthode de doctrine, & l'analyse, la méthode d'invention. Cette différence essentielle se déduit immédiatement de la nature des deux méthodes. La synthese uniquement occupée de l'évidence & de la certitude des vérités ne s'embarasse pas de la longueur, pourvû qu'elle acquiert l'une & l'autre. L'Analyse au contraire ne cherchant qu'à multiplier nos connoissances, s'efforce toujours d'arriver par la voie la plus courte, aux idées les plus générales, en négligeant quelque fois l'évidence dans les opérations qu'elle fait.

On pourroit induire de-là, qu'il y a des véritées géométriques qui ne sont pas évidentes ; & ce seroit priver la Géométrie

d'une de ses plus belles prérogatives. Pour sçavoir à quoi s'en tenir là dessus & pour éviter en même temps des discussions inutiles, il faut distinguer deux sortes d'évidence. On peut dire en général qu'une proposition est évidente, lorsqu'elle a une liaison nécessaire prochaine ou éloignée, avec les axiomes ou des vérités qui ont la même force. Suivant cette notion, toutes les vérités géométriques sont évidentes, quelque soit la méthode que l'on a employée pour les démontrer : mais il y a encore une espéce d'évidence plus particuliere; c'est celle qui présente les choses à notre esprit d'une maniére si claire & si nette, qu'on apperçoit non seulement la vérité, mais encore toutes les raisons qui concourent à l'établir réunies sous un seul point de vue. En un mot, l'évidence proprement dite est celle par laquelle nous connoissons la vérité metaphysique des propositions dont il est question. Cette évidence est particulierement attachée à la Synthese, dont les démonstrations sont également lumineuses & convaincantes, qualités nécessaires pour instruire utilement. On retrouveroit la même évidence dans les démonstrations algébriques, si l'on vouloit se donner la peine de développer une foule de raisonnements qui sont compris dans une expression fort courte en apparence;

Deux sortes d'évidence pour les vérités géométriques, ce que c'est que l'évidence proprement dite.

& c'eſt ce que l'on fait lorſque l'on démontre par Synthese un Théorême déja démontré par algèbre.

Néceſſité d'étudier la Géometrie par ynthe-ſe, & de réunir les deux méthodes, pour devenir Géometre.

Il ſuit de tout ce qui précede, qu'en général, il eſt abſolument néceſſaire d'étudier la Géométrie par la Syntheſe, ſi l'on veut acquerir quelque préciſion dans le raiſonnement & même faire quelque progres dans l'Analyſe; car cette derniere methode ſuppoſe un fond de connoiſſances évidentes ſans leſquelles on ne peut combiner & découvrir. Cette étude des éléments par la Syntheſe n'exclud pas l'analyſe, même pour ceux qui ne ſe deſtinent pas entierement aux Mathématiques. Ce ſont deux vérités également inconteſtables; l'une que l'on ne peut faire de grands progrès dans lAnalyſe ſans une ample connoiſſance des éléments par la Syntheſe; l'autre qu'on ne peut devenir un ſçavant Géometre ſi on ne fait uſage des reſſources infinies que nous donne l'Analyſe par le moyen du calcul. Il ſemble, cependant à conſidérer la maniere dont quelques perſonnes enſeignent la Géométrie, qu'ils n'ont aucune idée de cette premiere vérité; au moins n'y ont ils aucun égard. En effet, à peine a-t-on quelque connoiſſance des éléments, que l'on ſe jette aveuglement dans les calculs les plus compliqués de l'Analyſe, & l'on croit avoir trouvé la ſolution d'un

problême, dès que l'on a résolu l'équation qui en exprime les conditions. On est bien tôt revenu du plaisir que donnent de pareilles solutions, lorsque destitué de tous secours étrangers, il faut essayer ses forces pour arriver à la solution d'une question tant soit peu compliquée. C'est alors qu'on connoit qu'il est plus difficile d'arriver à l'équation, que de la résoudre. Si l'on n'étoit pas déja convaincu de cette vérité, il suffit pour cela de faire attention, qu'on a donné jusqu'ici des regles générales sur la résolution des équations, sans en avoir donné aucune pour les trouver. Car on n'est pas beaucoup plus avancé pour sçavoir qu'il faut bien examiner l'état de la question, & discuter avec soin ce qu'elle renferme.

Les questions aritmétiques présentent assez communément tout ce qui doit servir à trouver l'équation, lorsque le problême est déterminé. Il n'en est pas de même dans les questions géométriques ou physico-mathématiques. Les données ne paroissent pas quelque fois suffisantes, même dans les problêmes déterminés ; il faut imaginer de nouvelles lignes qui créent, pour ainsi dire, de nouvelles conditions dont on puisse tirer autant d'équations que d'inconnues. Pareillement, la solution d'un problême de méchanique dépend le plus

Preuve de cette vérité déduite de la nature des problêmes de Mathématiques.

souvent de la décomposition de certaines forces en d'autres qui leur sont équivalentes, mais tellement choisies & combinées, qu'on puisse trouver par leur moyen les propriétés dont on a besoin. Quelque fois même, comme nous l'avons déja dit, il faut sortir de son sujet pour arriver à une solution facile, qui sans cela deviendroit impraticable.

Toutes ces adresses de calcul ou de construction ne viennent pas se présenter d'elles-mêmes à l'esprit de ceux qui en ont besoin. Ce n'est pas le hazard ny un heureux tâtonnement qui doit nous les faire découvrir ; & de pareilles découvertes ne peuvent pas flatter une personne qui se rend justice à elle-même. C'est dans cette partie que la raison doit marcher toute seule, jusqu'à ce qu'arrivée à l'équation, elle puisse laisser faire le reste au calcul ; qui la conduir ainfailliblement au port, lorsqu'elle se sera une fois embarquée. Aussi tous les Géometres regardent-ils un problême comme résolu, dès qu'ils sont arrivés à l'équation. Il suit de toutes ces réflexions, que l'on perd le fruit des méthodes algébriques, lorsqu'on n'est pas en état de trouver l'équation qui en est le premier objet. On pourroit même aller plus loin, & l'on prouveroit aisément que celui qui semble faire un usage assez fréquent de ces

Inutilité des méthodes algébriques, pour ceux qui n'ont pas le raisonnement formé.

méthodes ne les conçoit pas entierement. Car pour les conçevoir, il faut ſentir toutes les conſéquences d'une hypotheſe, prévoir les variations que pourroient apporter dans ces méthodes les les différents changements dont les queſtions qui y ont rapport ſont ſuſceptibles ; or il eſt évident que tout cela eſt du reſſort du raiſonnement, & que les eſprits ordinaires n'en pourront venir à bout, ſi leur jugement n'a été fortifié par la Syntheſe. Ce n'eſt pas que je prétende qu'il n'y ait que la Syntheſe capable de fortifier le raiſonnement; l'Analyſe proprement dite, & celle qu'avoient inconteſtablement les anciens, je veux dire cette chaîne de raiſonnements; qu'on eſt obligé de faire, pour arriver à la ſolution d'un problême, par le moyen des équations ; cette Analyſe n'eſt certainement pas moins propre que la Syntheſe, pour perfectionner le jugement ; mais, comme elle le ſuppoſe déja formé, juſqu'à un certain dégré ; c'eſt-là ce qui établit la néceſſité de la Syntheſe.

L'analyſe des infiniment petits encore plus inutile pour ceux qui n'ont pas une certaine force de jugement.

Si l'Analyſe ordinaire eſt preſqu'inutile à ceux qui ne ſont pas aſſez inſtruits des vérités fondamentales de la Géométrie élémentaire ; peut-on s'imaginer qu'ils tireront quelqu'avantage de la ſublime Analyſe des infiniment petits. Ils paſſent d'ordi-

naire assez rapidement sur les suppositions qui ont arrêté les meilleurs esprits, & se croient eux-mêmes Géometres dès qu'ils ont résolu un *Maximum* ou un *Minimum*, dont on leur a donné l'équation. Une pareille sçience ne peut en imposer qu'aux ignorants, qui ne sçavent pas que ce n'est rien faire que de manier un calcul sublime, si l'on ignore la Métaphysique des principes sur lesquels il est fondé. On tombera toujours dans cette sçavante ignorance tant que l'on n'étudiera le calcul que pour lui-même, sans songer à la découverte des vérités qui en est le but. Cela vient de ce que l'on ne fait pas attention qu'il est très-possible, en suivant certaines regles, d'arriver à la connoissance des vérités les plus relevées, sans y avoir d'autre part que d'avoir mis en mouvement une machine dont on ignore les ressorts. Encore cette erreur seroit-elle pardonnable, si l'on n'y joignoit pas ordinairement la sotte vanité d'attribuer à la force de son génie des découvertes qu'on ne doit réellement qu'à l'excellence de la méthode dont on fait usage.

Conclusion & dessein de l'Autheur dans cet Ouvrage.

De toutes les parties des Mathématiques qui tiennent un certain milieu entre les éléments & la haute Géometrie ; je n'en ai point trouvé de plus susceptible de la méthode

méthode Synthétique, que les courbes connues sous le nom général de sections coniques. Je me suis déterminé d'autant plus volontiers à travailler sur cette matiere, malgré tout ce qui a déja été fait là-dessus, que l'on n'a pas encore d'éléments synthétiques à la portée des Commençants; la plus part se trouvant dans des gros volumes latins très incommodes & très rares. Les meilleurs dans ce genre sont sans contredit ceux de *Grégoire de S. Vincent*; mais on est éffrayé, lorsque l'on voit le détail immense dans lequel il est entré. Le Livre que je présente aujourd'hui n'étoit dans son principe qu'une nouvelle édition des éléments de *M. de la Hire*, mais ayant été indispensablement obligé d'éclaircir plusieurs endroits obscurs, & de démontrer généralement des propositions qu'il ne démontroit que dans des cas particuliers; je me suis déterminé à suivre en général le plan de l'Auteur, sans m'astreindre à suivre en tout ses démonstrations, dont quelques unes ne m'ont point parû complettes. En un mot, ce Livre pourra servir d'introduction à tous les autres faits sur cette matiere, & même au grand traité des sections coniques du même Auteur, qui a passé pour un des plus difficiles & des plus beaux ou-

vrages que nous ayons en ce genre. Ceux qui ne voudroient que ce qui est absolument essentiel pourront n'étudier dans les trois premiers livres que ce qui regarde les propriétés des axes & des diametres, auxquels ils pourront joindre les propositions que j'ai donné sur la quadrature de ces courbes, & qui m'ont paru indispensables dans des éléments. Dans le reste de chaque livre, j'éxamine les propriétés les plus générales des sections coniques, par le moyen des sécantes intérieures, & extérieures de chacune de ces courbes; soit pour les décrire par plusieurs points donnés; soit pour fixer le nombre des poins dans lesquels elles peuvent se couper, ce qui est très-important dans la construction des équations du troisieme & quatrieme dégré; soit enfin pour déterminer par leur moyen les tangentes, les sou-tangentes, les normales, les sou-normales, dont la connoissance peut être très-utile dans un grand nombre de cas applicables à la pratique; comme j'espere le faire voir par la suite. On peut voir à la tête du quatrieme & cinquieme livre les Avertissements qui annoncent ce que je me suis proposé dans ces additions. Au reste, je ne suppose pour la connoissance de cet ouvrage que les plus simples éléments de

Géométrie, & je tâche de conduire les Commençants jusqu'aux plus curieuses propriétés de ces courbes qui sont la base de toutes les parties des Mathématiques. Pour ce qui est des Autheurs dont j'ai pris quelque chose, je les cite, lorsque ma démonstration ne differe point de la leur; mais je n'ai pas cru devoir m'assujettir à cela, lorsqu'elles sont entierement différentes. Je ne parle point des Sections coniques des dégrés supérieurs; quoiqu'elles ayent des propriétés analogues à celles de chaque section du premier genre de même nom. Une Théorie de ces courbes, quoique très-interessante, seroit devenue fort difficile par la méthode synthétique, & demanderoit à elle seule, un volume entier.

FIN.

APPROBATION.

DU CENSEUR ROYAL.

J'AY lû par ordre de Monseigneur le Chancelier, *Les Elémens des Sections coniques démontrées par synthese.* Cet Ouvrage dont le fonds appartient à M. *De la hire*, a été estimé de tous les sçavans; le public en désiroit une nouvelle édition, mais il étoit apropos de l'augmenter. L'Auteur qui a entrepris ce travail, l'a fait avec soin, & a conservé dans ses démonstrations cette éxactitude si recherchée par les anciens Géometres; il y a ajoûté un grand nombre de propositions qui n'étoient point dans l'Ouvrage de M. *De la hire*, il l'a aussi enrichie de quelques Théorêmes dont les remarques & les applications sont nouvelles: elles sont démontrées avec clarté, & mises à la portée de ceux qui sçavent les élémens de Géométrie. il est à souhaiter que cet ouvrage fasse renaître le goût de la synthese, un peu trop abandonnée; après la lecture de celui-ci, on sera plus en état de comparer avec fruit la méthode analytique que les Geometres ont adoptée depuis quelque tems à celle des anciens.

Fait à Paris ce 3 Avril 1757. MONTCARVILLE.
Lecteur & Professeur royal.



LEMME

FONDAMENTAL,

Pour l'intelligence de ce Traité.

* *SI une ligne droite* AB *eſt coupée en deux parties égales en* C, *&* *en deux autres parties inégales en* D *: je dis que le rectangle des deux parties inégales, eſt égal au quarré de la moitié de la ligne, moins le quarré de la moyenne, ou* (ce qui revient au même) $AD \times DB = CB^2 - CD^2$. (Fig. 1.)

DÉMONSTRATION.

$AD = AC + CD = BC + CD$ puiſque $BC = AC$, & de même $BD = BC - CD$.

Donc $AD \times BD = (BC + CD) \times (BC - CD)$. Et faiſant la multiplication indiquée, on aura $BC^2 + BC \times CD - BC \times CD - CD^2$, ce qui ſe reduit à $BC^2 - CD^2$; en effaçant ce qui ſe détruit. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ce Lemme eſt d'un grand uſage pour dé-

montrer les propriétés des sécantes intérieures & extérieures dans les courbes que nous allons traiter. C'est pourquoi l'on ne sçauroit l'avoir trop présent à l'esprit.*

DE LA PARABOLE.

Génération de cette Courbe.

S'*IL y a sur un plan une ligne droite* AD, *& un point* F *hors de cette droite ; je dis que l'on pourra trouver une infinité de points, comme* P, P, P *tels que la ligne* FP, *menée du point* F *à chacun de ces points* P, *soit égale à* PA *menée du même point* P *perpendiculairement à* AD. (Planche 1. figure 2.)

DÉMONSTRATION.

Par un point quelconque *A* de la ligne *AD*, j'éléve la perpendiculaire indéfinie *APR*. Je joins les points *A*, *F* par la ligne *AF*. Enfin je fais l'angle *AFP* égal à l'angle *FAP*. Il est évident, par cette construction, que le point *P* est un de ceux que l'on demande, puisque le triangle *APF* est isocèle, & que *AP* est perpendiculaire à *AD*. Il est de plus évident que l'on pourra trouver une infinité de points comme *P*, puisque l'on pourra prendre une infinité de points comme *A*, sur la

ligne *AD*, pour les déterminer de la même maniere. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

2. Si par le point *F*, on mene la ligne *FD* perpendiculaire à la ligne *AD*, il est évident que la ligne qui passe par les différens points *P* coupera aussi la ligne *FD*, & de plus qu'elle la divisera en deux également en *T*. Il suit encore de la même génération, que cette ligne *PPT* s'augmente à l'infini, & qu'elle s'éloigne aussi à l'infini de la ligne *FD* prolongée vers *S*.

DEFINITIONS

I.

3. La ligne *PPT*, formée par les points *P*, *P* est appellée *Parabole*. On verra dans la suite pour quelle raison les anciens Géometres l'ont ainsi nommée.

II.

4. Le point *F* pris sur le même plan que la droite *AD*, & placé hors de cette droite: est appellé *le foyer* de la Parabole.

III.

5. La ligne *AD* *Directrice* de la parabole.

IV.

6. La ligne *DFO* perpendiculaire à la di-

rectrice *AD*, & qui passe par le foyer *F*, est nommée *l'Axe* de la parabole.

V.

7. Le point *T* qui divise en deux également, la partie de l'axe comprise entre le foyer & la directrice *AD le sommet* de la parabole.

VI.

8. Une perpendiculaire *PO* menée d'un des points *P* de la courbe sur l'axe & terminée au même axe, *ordonnée, ou appliquée* à l'axe.

VII.

9. La partie *TO* de l'axe, comprise entre le sommet *T* de la courbe & la rencontre *O* de l'ordonnée, est appellée *abscisse, ou coupée.*

VIII.

10. Toute ligne menée dans la parabole parallélement à l'axe, est appellée *diamètre.*

IX.

11. Une ligne droite qui ne rencontre la parabole qu'en un seul point, & qui ne passe pas au dedans, est appellée *tangente* en ce point.

X.

12 Une ligne double de *FD* comprise entre le foyer *F* & la directrice, s'appelle *parametre* de l'axe.

COROLLAIRE.

13. On voit que le foyer est éloigné du sommet de la parabole, du quart du parametre de l'axe.

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

14. *Supposant la parabole formée comme on vient de l'expliquer; si de quelqu'un de ses points* P *on abaisse l'ordonnée perpendiculaire à l'axe* PO*: je dis que l'on aura* $PO^2 = 2OT \times DF$.

DÉMONSTRATION.

A cause du parallélogramme rectangle *ADOP*, ou à $OD = AP = FP$ par *la génération* & à cause du triangle rectangle *FOP*, on a $FP^2 = FO^2 + PO^2$.

Mais *DO* étant coupée en deux parties inégales en *F*, son quarré sera égal au quarré de $\overline{DF + FO} = DF^2 + 2DF \times FO + FO^2 = (DF + 2FO) \times DF + FO^2$: & à cause que *DF* est coupée en deux également en *T*, en met-

tant à la place DF, $2FT$ qui lui est égal, il vient pour une nouvelle expression du quarré de DO, $(2FT+2FO)\times DF+FO^2=2OT\times DF+FO^2$. On a donc $FO^2+PO^2=2OT\times DF+FO^2$ & ôtant de ces quarrés égaux le quarré FO^2 qui leur est commun il vient $PO^2=2OT\times DF$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

15. Il est évident par ce qu'on vient de démontrer que le quarré de chaque ordonné PO, est égal au produit de son abscisse TO par le double d'une même ligne FD. Car puisque l'on a $PO^2=2OT\times DF$, on a aussi $PO^2=OT\times 2DF$.

Corollaire II.

16. Il est encor évident que les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les abscisses correspondantes à ces ordonnées. D'un point quelconque p soit menée une ordonnée po on aura $po^2=2DF\times oT$: mais on a aussi $PO^2=2DF\times OT$ donc $PO^2 : po^2 :: OT\times 2DF : oT\times 2DF :: OT . oT$, en divisant la seconde raison par $2DF$.

Corollaire III.

17. Si l'on reduit en proportion l'égalité $PO^2=2DF\times OT$. On aura cette proportion continue $OT : PO :: PO : 2DF$. Ce qui montre

que le parametre est troisieme proportionnelle à l'ordonnée & à son abscisse. Ainsi connoissant une abscisse quelconque & l'ordonnée correspondante, on pourra toujours trouver le parametre.

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

18. *La ligne droite* TS *menée par le sommet* T *de la parabole parallélement à l'ordonnée* PO, *touche la parabole au même point* T. (Fig. 2.)

DÉMONSTRATION.

Supposons qu'elle puisse rencontrer la parabole en quelqu'autre point *S*. Par ce même point *S*, je méne *Sa* perpendiculaire à la directrice, & *SF* au foyer. Puisque ce point *S* est un des points de la parabole, on aura *SF*=*Sa*; mais à cause du parallélogramme rectangle *aDTS*, *Sa*=*DT*=*FT* donc on auroit, *SF*=*FT*. Ce qui est absurde, puisque l'hypotenuse d'un triangle rectangle, est nécessairement plus grande qu'un des côtés : & comme on démontrera la même chose pour tout autre point que le point *S*, il suit que la ligne *TS* touche la parabole en *T*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

19. *Supposant les mêmes conditions ; je dis*

qu'un diametre PI *ne rencontre la parabole qu'en un seul point* P, *& qu'il passe au dedans de la parabole.* (Fig. 3.)

DÉMONSTRATION.

Si le diametre *PI* rencontroit encor la parabole en quelqu'autre point *I*, *par la génération*, les lignes *IF IA* seroient égales, mais *PF* & *PA* le sont aussi par la même raison, & en leur ajoutant la même *PI* on aura $PF+PI=IA$. On auroit donc aussi $PF+PI=IF$, ce qui est absurde; car deux côtés d'un triangle pris ensemble, sont toujours plus grands que le troisiéme.

De plus la parabole s'éloignant continuellement de son axe *TF*, *par le corollaire de la génération*, elle s'éloignera aussi du diametre *PI* parallele au même axe, c'est pourquoi *PI* est tout entier au dedans de la parabole. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

20. *Tout étant comme dans la proposition précédente; si l'on tire* AF, *& que par le milieu* E *de cette ligne & le point* P, *on mene la droite* PEG; *je dis que cette ligne sera tangente au point* P. (Fig. 3.)

DÉMONSTRATION.

Puisque le point *P* est un des points de la

parabole, on a $PF=PA$. Mais le point E eſt le milieu de AF; donc la ligne PE eſt perpendiculaire ſur AF, & paſſe par tous les points également éloignés d'A & d'F. Cela poſé, il eſt évident que tout point comme p différent de P, ne peut appartenir à la parabole. Par le point p ſoient menées les droites pA pF, qui ſeront égales; par le même point ſoit abaiſſée la perpendiculaire pa à la directrice AD. Si ce point étoit à la parabole, on auroit *par la génération* $Fp=ap$: donc auſſi ap ſeroit égal à Ap, puiſque $Fp=Ap$, ce qui eſt abſurde : puiſque l'hypothenuſe Ap d'un triangle rectangle eſt néceſſairement plus grande qu'un des côtés de l'angle droit. On démontrera la même choſe, de tout autre point pris au delà de P par rapport à E : donc la droite PE ne rencontre la parabole qu'au ſeul point P.

Je dis de plus qu'elle ne peut couper la parabole, ou ce qui eſt la même choſe, que tout point comme S au delà de cette ligne par rapport à l'axe, ne peut être à cette courbe. Par le point S, aux extrémités A F de FA, ſoient menées SF & SA, par le point r ou la droite SF rencontre la ligne PE ſoit menée rA, on aura $Fr=rA$. Donc $Fr+rS$, ou $FS=Ar+rS$, mais $Ar+rS>AS$; donc auſſi $FS>AS$. Enfin ſi l'on abaiſſe SV perpendiculaire à la directrice, l'hypothénuſe AS, ſera évidemment plus grande que le côté SV. Donc à plus forte raiſon, on aura $FS>SV$:

donc le point S n'eſt point à la parapole, puis l'on n'a pas $FS=SV$. Donc la droite PEG eſt tangente puiſqu'elle rencontre la parabole au ſeul point P & ne peut la couper. *Ce qu'il falloit demontrer.*

Corollaire I.

21 Il ſuit de cette propoſition que l'angle FGE fait par la tengente GE avec l'axe, eſt égal à l'angle FAD. Car les triangles rectangles FAD, FEG ont un angle commun en F. Il eſt encore viſible que le même angle FAD eſt égal à l'angle APE, à cauſe des paralélles AP FG.

Enfin le triangle PFG eſt iſocéle ; car la ligne GP étant perpendiculaire ſur le milieu de AF, diviſe l'angle APF en deux également. Donc l'angle $FPE = EPA = FGE$ à cauſe des paralléles AP GF : donc $FP = FG$.

Corollaire II.

* 22. Puiſque le triangle GFP eſt iſocéle, il eſt évident que l'angle extérieur PFK eſt double de l'angle PGF.

Problème. I.

23. *Une parabole* TPR, *ſon axe* GK & *ſon foyer* F *étant donnés, trouver une tangente qui faſſe avec l'axe un angle égal à un angle don-*

né fgp ; pourvû qu'il ne ſoit pas plus grand qu'un droit. (fig. 3.)

SOLUTION.

Au foyer *F*, faites l'angle *KFP* double de l'angle donné, le côté *FP* de cet angle, ira couper la parabole en quelque point *P*. Enſuite du même point *F* comme centre & pour rayon *FP* décrivez un arc qui coupe l'axe en *G*. Je dis que la ligne *GP* menée par le point *G* & par le point *P* eſt tangente en *P* & qu'elle fait avec l'axe un angle égal à l'angle propoſé.

DÉMONSTRATION.

Du point *P* ou la ligne *FP* recontre la parabole, ſoit abaiſſée *PA* perpendiculaire à la directrice : & ſoit menée la ligne *FA* à cauſe des paralléles *AP*, *FG* l'angle *APG*= l'angle *FGP*. Mais *par conſtruction* l'angle *FGP*= l'angle *FPG* puiſque le triangle eſt iſocéle. Donc *FGP*=*APG*, c'eſt-à-dire que la ligne *AF* eſt diviſée en deux également en *E* par *PG*, & par conſéquent cette même ligne eſt tangente en *P*, *par la derniere propoſition*. Enfin l'angle *PFK* ayant été fait double de l'angle donné, & étant extérieur au triangle iſocéle *PGF*, il eſt évident que l'angle *GFP* eſt égal à l'angle propoſé. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.* *

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

24. *Par un point* P *donné sur la parabole, l'on ne peut mener qu'une tangente* PG. (fig. 4.)

DÉMONSTRATION.

Supposons d'abord que par le point *P* dans l'angle *PGF*, on puisse mener une ligne *Pg*, aussi tangente à la parabole. Par le point *F* je mene *Fa* perpendiculaire à *Pg*. Il est évident que le point *a* doit tomber entre *A* & *D* sur la directrice; car l'angle *PgF* étant extérieur au triangle *PGg*, est plus grand que l'angle *G*: donc en comparant les triangles rectangles, *Fdg FEG* l'angle *GFE* sera plus grand que l'angle *gFd*: du point *a* soit élevée la ligne *ap* perpendiculaire à la directrice & qui rencontrera la parabole en quelque point *p* duquel on menera *pF* au foyer, qui sera égal à *pa par la génération*; enfin par ce même point *p* & par le point *e* milieu de *aF*, on menera la droite *peM* qui sera aussi perpendiculaire à *Fa* & tangente au point *p*; *par la proposition précédente.* D'où il suit que la droite *Pg* ne peut être tangente, puisqu'elle sera toujours separée de sa paralléle *peM* de la distance *de* si petite qu'elle soit. Donc elle passe au dedans de la parabole, & la droite *PG* est la seule tangente que l'on puisse mener par le point *P*; car on prouvera de la même manie-

re qu'ayant mené cette tangente *PG* au point *P*, on ne peut en mener une autre au même point *P*, qui passe au dessus de PG. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

25. On voit par ce qui a été démontré cidessus, que toutes les tangentes rencontrent l'axe, & tous les diametres ; & qu'elles se rencontrent toutes, puisque, *par la quatriéme proposition*, elles ne sont que paralléles.

PROPOSITION VI.

PROBLÊME II.

26. *Trouver une tangente qui fasse avec l'axe du côté de la parabole un angle moindre que quelqu'angle donné que ce soit, pourvû qu'il ne soit pas plus grand qu'un droit.* (fig. 5.)

Solution.

Soit tirée *Fa*, en sorte que l'angle *FaD* soit égal à l'angle donné ; ou ce qui est la même chose, soit fait l'angle *DFa* égal au complement de l'angle donné : soit ensuite pris le point *A* au-delà du point *a* à l'égard de l'axe : il est évident que l'angle *FAD* sera plus petit que l'angle donné *FaD* ; & *par le corollaire* 1er *de la quatriéme proposition* ; la ligne *PEG*

menée par le milieu *E* de la droite *FA* sera tangente en *P*, & fera avec l'axe l'angle *PGF* égal à l'angle *FAD* moindre que l'angle *FaD* donné. *Ce qu'il falloit trouver & démontrer.*

PROPOSITION VII.

Théorême.

27. *Supposant toujours les mêmes choses que ci-devant ; je dis que la partie* TG *de l'axe comprise entre le sommet* T *de la parabole, & la rencontre de la tangente en* G *est égale à l'abscisse* TO.

Démonstration.

Par le corollaire 1[er] *de la quatriéme proposition*, le triangle *PFG* est isocéle ; donc *FG*=*FP*= *AP*=*OD*, à cause du parallélogramme *ADOP*: & si de ces égales *FG*. *OD*, on ôte les égales *FT* *DT*, on aura les restes égaux *OT* *TG* ; *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire:

28. Si par le point *T*, on mene la tangente *TS*, jusqu'au diamétre *PI*, & la ligne *TI* parallele à la tangente en *P* ; il suit de la présente proposition que l'on aura *PS*=*PI* : car à cause du parallélogramme rectangle *POTS* on a *PS*=*TO* & à cause du parallélogramme *PGTI* on a *PI*=*TG*, mais *TO*=*TG* : donc *PS*=*PI*.

DÉFINITION.

* 29. La ligne OG comprise entre l'ordonnée *PO*, & la rencontre G de l'axe par la tangente *PG* menée par le point *P*, s'appelle *sou-tangente.* D'où il suit que la sou-tangente est double de l'abcisse, par la précédente proposition.

PROBLÊME III.

30. *Un point* P *étant donné sur la parabole : mener une tangente en ce point.*

SOLUTION.

Du point donné *P* je mene l'ordonnée à l'axe *PO*. Je prens sur le même axe indéfiniment prolongé, la partie TG égal à *OT*. Enfin par le point *G*, & le point donné *P* je mene la droite *PG* qui sera la tangente demandée ; comme il est évident par *la proposition précédente.*

PROBLÊME IV.

31. *D'un point* G *pris sur le prolongement de l'axe, mener une tangente à la parabole.*

SOLUTION.

Je prends sur l'axe au dedans de la parabole, la partie *OT*=*TG*. Au point O j'éléve

la perpendiculaire *OP*, qui rencontre la parabole en *P*. Enfin par ce point & le point donné *G*, je mene *PG* qui sera la tangente que l'on demande.

On voit par ces deux problêmes, que les propriétés des ſou-tangentes donnent un moyen facile pour mener les tangentes à la parabole ; & c'eſt par cette raiſon que tous les Géometres ont cherché des expreſſions générales de ces lignes dans toutes ſortes de courbes, afin de pouvoir leur mener des tangentes, lorſqu'il eſt néceſſaire.

PROBLÊME V.

32. *Une parabole* MAN, *ſon axe* AF, *le foyer* F *& la directrice* DR *étant donnés avec un point* P *ſur le même plan ; mener une tangente qui paſſe par le même point* P. (Fig. 7 & 8.)

SOLUTION.

Du point *P* comme centre & rayon *PF*, ſoit écrite une portion de cercle qui coupera la directrice en deux points *RS* ; ſoient tirées les lignes *RF* & *SF* au foyer ; leſqu'elles ſeront diviſées en deux parties égales en *G* & *g*. Enfin par ces points & par le point donné *P*, on menera les droites *OPGL*, *Pogl* qui ſeront chacune tangentes, l'une en *O* & l'autre en *o* ; & paſſeront toutes deux par le point *P*. Enfin pour déterminer le point de contingence *O*, *o* par les points *SR* on élevera les perpendiculaires

laires à la directrice *SO*, *Ro* jusqu'à ce qu'elles rencontrent la parabole aux points O, *o* qui seront les points de contingence demandés.

DÉMONSTRATION.

A cause du cercle *FRS*, on a *PF* = *PS*. Donc le point *P* est également éloigné d'*F* & d'*S*. D'ailleurs on a divisé *FS* en deux également en *G* ; donc *PG* est perpendiculaire sur le milieu de *FS*, donc elle passera par tous les points également éloignés d'*F* & d'*S*. Donc elle passera par le point *O*, ou la ligne *SO* paralléle à l'axe, rencontre la parabole & touchera la courbe en ce seul point. Car on démontrera, comme dans la quatriéme proposition, que tout point différent du point *O*, ne peut appartenir à cette courbe.

On voit évidemment par la figure 8. que ce seroit la même solution, si le point *P* étoit au-delà de la directrice, par rapport à la parabole.

REMARQUE.

53. *Le problême aura toujours deux solutions, tant que le point donné ne sera pas sur la courbe. Car alors la directrice seroit tangente au cercle décrit du rayon* PF, *& si le cercle ne coupoit pas la directrice, ou ne la rencontroit en aucun point, le problême seroit impossible, & l'on seroit sur que le point* P *seroit au dedans de la parabole.*

Ce problême renferme les deux précédents & l'on peut se servir de cette construction pour les résoudre.

ce point comme centre & ayant pour rayon MA, *touche la double ordonnée en* A, *& la parabole en deux points* P. Q. (Fig. 10).

SOLUTION.

On prendra fur l'axe la partie $AO = AB$; au point O, on élevera l'ordonnée OP. Enfin ayant pris OM égal à la moitié du parametre TH du côté de l'ordonnée AB, & joint les points P, M, par la ligne MP : le point M fera le centre du cercle demandé.

DÉMONSTRATION.

Puifque l'on a fait OM égal à la moitié du parametre TH, il eft évident, *par la propofition précédente*, que la ligne PS perpendiculaire à PM, eft tangente à la parabole P. Elle eft auffi tangente au cercle au même point P ; puifqu'elle eft perpendiculaire à l'extrémité du rayon MP. Donc le cercle touche la parabole au point P. Ce qui fe démontrera de même par rapport au point Q : refte à faire voir que CB touche auffi le cercle en A, ou, ce qui revient au même, que $AM = PM$.

Par conftruction $AO = AB$. Donc $TO = AT - AB$. Donc $PO^2 = TO \times TH = AT \times TH - AB \times TH$. OM étant égal à la moitié du parametre TH. Son quarré $OM^2 = \frac{1}{4} TH^2$, & à caufe du triangle rectangle POM, on a $PM^2 = PO^2 + OM^2$. Donc $PM^2 = AT \times TH - AB \times TH + \frac{1}{4} TH^2$.

De même $AM = AO - OM = AB - \frac{1}{2}TH$. Donc $AM^2 = (AB - \frac{1}{2}TH) \times (AB - \frac{1}{2}TH) = AB^2 - AB \times TH + \frac{1}{4}TH^2$. Donc $PM^2 = AM^2$; car *par la propriété de la parabole*, $AB^2 = AT \times TH$. Donc $PM = AM$. *Ce qu'il falloit trouver & démontrer.* *

PROPOSITION X.

Théorême.

44. *Dans la parabole* TEP, *dont l'axe est* TO, *une tangente* PH, *terminée à l'axe en* H, & *une autre tangente à l'origine de l'axe en* T, *rencontrant le diametre* DP *en* B: *Je dis que le triangle* TAH, *fait par les deux tangentes & par l'axe est égal & semblable au triangle* BAP *fait par les mêmes tangentes & le diametre* PB. (Fig. 11).

Démonstration.

Par le point *P*, origine du diametre *PD*: je mene l'ordonnée à l'axe *PO*, *par la septiéme proposition* $TO = TH$; mais *à cause des paralléles* $TB\ PO$, $TO = BP$. Donc $TH = BP$, d'où il suit évidemment, que les triangles rectangles *PAB TAH* sont égaux & semblables, puisqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun & un côté égal. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

45. Ayant mené *TD* paralléle à *PH*, si à chacun des triangles égaux *PAB TAH*, on ajoute le quadrilatere *TDPA*, on aura le triangle *TDB* égal au parallélogramme *TDPH*;

ou bien au rectangle *TOPB*, à cause des parallèles *BP*, *MH* & des bases égales *TO*, *TH*.

Il est aussi évident que le même triangle *TDB* est égal au triangle *POH*, en ôtant du rectangle *TOPB* le triangle *PAB*, & ajoûtant au reste *APOT* le triangle *TAH* qui lui est égal.

PROPOSITION XI.

Théorème.

49 *Supposant les mêmes choses, si de quelque point* E *de la parabole, on mene les droites* EG, EM *paralléles aux tangentes* TB, PH; *je dis que le triangle* EGM *est égal au rectangle* GTBF. (Fig. 11).

Démonstration.

Les triangles POH, EGM *étant semblables à cause des paralléles*, PH, IM; PO, GF, *on a* $POH:EGM::PO^2:EG^2$ *& par cor. 3 de la 1ere proposition* $PO^2:EG^2::TO:TG$ *& à cause des paralléles* BP, GH, TO:TG::TOPB:TGBF Donc POH : EGM : : TOPB : TGBF.

Mais *par la précédente proposition*

POH=TOPB *donc aussi* EGM=TGBF.

Ce qu'il falloit démontrer.

47. Mais si le point *E* étoit au-delà du diametre, par rapport à l'axe comme en *e*, ayant mené l'ordonnée *eg* qui rencontre l'axe en *g*. Les triangles *egM* & *POH*, ayant leur côtés paralléles seront semblables, & donneront $POH:egM::PO^2:eg^2$ *& par corollaire 3. de la 1ere proposition* $PO^2:eg^2::TO:Tg$ *& à cause des paralléles BP GH* *TO : Tg :: TOPB : TgfB*.

Donc *POH : egM : : TOPB : TgfB.*
Mais *par la précédente proposition* *POH = TOPB* donc aussi *egM = TgfB.* *La proposition est donc encore vraye dans ce cas* (Fig. 11.)

48. Enfin si le point *E* est au-delà de l'axe, par rapport au diametre *PI* (Fig. 12); la proposition subsiste toujours. Car les triangles *POH, EGM* seront toujours semblables, & la démonstration ne differe en rien de celle du premier cas : d'où il suit que cette proposition est générale, & démontrée pour tous les cas possibles.

PROPOSITION XII.

Théorême.

49. *Les mêmes choses étant posées : je dis que le triangle* EFI *est égal au parallélogramme* PIMH.

Démonstration.

Si le point *E*, est entre *P* & *T* (Fig. 11); *par le corollaire de la* 10eme *proposition* *POH = PQTB*; mais *par la précédente* *EGM = GTBF.*

Donc *POH − EGM = POTB − GTBF* & ôtant encore de chaque membre de l'égalité le quadrilatere *PQGO* : on aura *POH − EGM − PQGO = POTB − GTBF − PQGO* ou *MEQH = PQF*, donc en ajoûtant à chaque membre de l'égalité, le quadrilatere *PIEQ* : *MEQH + PIEQ = PQF + PIEQ*, ou réduisant *PIMH = EFI.*

50. Si le point *E* est au-delà de l'axe, *par*

rapport au diametre *PI* (Fig. 12.); par *la* 10eme *proposition*, le triangle *PAB*=*TAH*. Donc *PAB*+ *PIMTA*=*TAH*+*PIMTA* : & réduisant on à le quadrilatere *TBIM*=*PIMH*. Enfin ôtant de ce quadrilatere le rectangle *GTBF*, & lui ajoûtant le triangle *EGM* égal à ce rectangle, on a encore le triangle *EFI*=*PIMH*.

Enfin si le point *E* se trouve de l'autre côté du diametre, par rapport à l'axe comme en *e* (Fig. 12.), *par la* 10eme *proposition* *TAH*=*PAB*. Donc *TAH*+ *TgfPA*=*PAB*+*TgfPA*; ou en réduisant *HgfP*=*TgfB*=*egM*, *par la précédente*. Donc *HgfP*−*MgfI*=*egM*−*MgfI*, ou ce qui revient au même après la réduction, le parallélogramme *PIMH* égal au triangle *efI*. *Ce qu'il falloit démontrer dans tous les cas.*

PROPOSITION XIII.

Théorême.

51. *Les choses étant toujours dans le même état, si d'un point* E *de la parabole, on mene une droite* Ee *parallèle à la tangente* PH, *je dis qu'elle rencontre la parabole en un autre point* e, *& qu'elle est coupée en deux également en* I, *par le diametre* PI, *mené par le point de contingence* P (Fig. 11.).

Démonstration.

Si la tangente étoit *BT*, la proposition seroit évidente *par la génération* ; mais si c'est toute autre tangente comme *PH* : *par la sixiéme proposition*, l'on peut trouver une tangente *RS* qui fasse avec l'axe un angle *RSO* moin-

dre que l'angle *PHG*. Il eſt évident que le point *R* ou cette ligne touche la parabole, eſt plus éloigné du ſommet *T* que le point *P*, & partant elle coupera la premiere tangente en *a* au delà de *P*, par rapport à *H*. Mais elle ne peut la couper, qu'elle ne coupe auſſi ſa paralléle *Ee* en quelque point ; donc cette droite *Ee* qui a déja un point *E* ſur la parabóle, la va couper encore en quelque point *e*, puiſqu'elle ne peut être coupée par la tangente *RS*, que hors de la parabole & au delà de *P*, par rapport à l'axe. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

2°. *Par la propoſition précédente*, le triangle *EFI* eſt égal au parallélogramme *PIMH*, lequel eſt auſſi égal au triangle *efI*, *par la troiſiéme partie de la même propoſition.* Donc les triangles ſont égaux : ils ſont de plus ſemblables, à cauſe des lignes paralléles qui les forment. Donc $EI = eI$: *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

DÉFINITIONS.

I.

52. On appelle *ordonnée* à un diametre, les lignes paralléles à la tangente qui paſſe par l'origine de ce diametre, de même que les perpendiculaires à l'axe ſont appellées ſes ordonnées.

COROLLAIRE.

* 53. D'où il ſuit que l'angle de la tangente à l'origine du diametre, détermine l'angle

des ordonnées à ce même diametre, & les ordonnées à l'axe ne lui sont perpendiculaires, que parce que la tangente au sommet de la parabole, est perpendiculaire à ce même axe.

I I.

54 On appelle *abscisses ou coupées* d'un diametre quelconque (Fig. 13.) les parties *PI PY* de ce diametre comprises entre son origine *P* & les rencontres *I*, *Y* des ordonnées *EI ÆY* à ce même diametre. *

PROPOSITION XIV.

Théoreme.

55. *Supposant toujours les mêmes choses que dans les propositions précédentes : je dis que les quarrés des ordonnées* EI, ÆY *à un diametre* PI, *sont entr'eux comme les abscisses correspondantes* PI, PY : *ou ce qui revient au même, que l'on a* $EI^2 : ÆY^2 :: PI : PY$ (Fig. 13).

Démonstration.

A cause des triangles semblables *EFI ÆFY*.
On a $EFI : ÆFY :: EI^2 : ÆY^2$. Mais *par la précédente* $EFI = PIMH$, & *par la même* $ÆFI = PYMH$.
Donc $EFI : ÆFI :: PIMH : PYMH$.
Donc $EI^2 : ÆY^2 :: PIMH : PYMH$.
& *à cause des paralléles* *MH PY*
$PIMH : PYMH :: PI : PY$.
Donc $EI^2 : ÆY^2 :: PI : PY$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Il en est de même si les ordonnées sont de l'autre côté du diametre comme *eI*, car elles sont égales aux précédentes, *par la treiziéme proposition. Ce qu'il falloit démontrer.*

Définition.

Du Parametre.

56. La troisiéme proportionnelle à l'abscisse *PI*, & à l'ordonnée *IE*, est appellée *parametre du diametre PI*, ensorte que si l'on fait cette proportion continûe

$$PI : IE :: IE : PR$$

cette ligne *PR* sera le parametre cherché.

Corollaire I.

57. Il est évident par cette définition, que les quarrés de toutes les ordonnées comme *ÆI*, sont égaux au rectangle fait du parametre & de l'abscisse correspondante.

* On a nommé la ligne dont nous venons de donner la définition, *parametre*; parce qu'elle sert de commune mesure pour connoître la valeur des quarrés de chaque ordonnée.

58. Les anciens Géometres ont aussi appellé cette ligne *latus rectum*, sans doute parce qu'étant appliquée d'équerre à l'origine du diametre, elle devient côté d'un rectangle qui a l'abscisse pour base, & qui est égal au quarré de l'ordonnée, comme nous venons de le voir.

Corollaire II.

59. Il suit aussi de cette définition, que

les propriétés des diametres de la parabole sont précisement les mêmes que celles de l'axe; & c'est cette parfaite égalité entre les quarrés des ordonnées & les produits de leurs abscisses par le parametre, qui a fait donner à cette courbe le nom de parabole.

COROLLAIRE III.

60. Si une ordonnée *RS* (Fig. 12) est égale au parametre *p*, l'abscisse *PR* sera aussi égale au parametre : car appellant *p* le parametre, puisque $RS = p$ (*hyp.*); donc $RS^2 = p^2 = PR \times p$: & divisant chaque terme par *p*, il vient $p = PR$.

COROLLAIRE IV.

61. Si l'ordonnée *EI* est plus petite que le parametre, l'abscisse *PI* sera aussi plus petite que le même parametre, puisque l'on a $PI : IE :: IE : p$ par la définition du parametre, & réciproquement.

COROLLAIRE V.

62. Enfin si une ordonnée est plus grande que le parametre ; l'abscisse correspondante sera aussi, à plus forte raison, plus grande que le même parametre, & réciproquement.

PROPOSITION XV.

THÉOREME.

63. *Une parabole* MAN (Fig. 14) *étant donnée avec un diametre* AP *& une tangente* AT *à l'origine de ce diametre, je dis que si l'on divise l'angle*

PAT *que fait la tangente avec le diametre en deux également par la ligne* AM, *& que du point* M, *où elle rencontre la parabole on mene l'ordonnée* MP *au diametre* AP, *cette ordonnée sera égale au parametre de ce diametre.*

DÉMONSTRATION.

Puisqu'on a divisé l'angle en deux parties égales, donc $TAM = MAP$: mais MP étant ordonnée au diametre AP, est paralléle à la tangente & partant les angles alternes internes TAM, AMP sont égaux ; donc aussi $AMP = MAP$. Donc $MP = AP$; puisque le triangle MPA est isocele : par la propriété de la parabole MP^2 ou $AP^2 = AP \times p$ en supposant que p soit le parametre, & en divisant chaque membre par AP, on a AP ou $MP = p$: *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

64. *Cette proposition donne un moyen très facile de connoître le parametre d'un diametre quelconque, en supposant que l'on connoît l'angle que fait la tangente à l'origine du diametre, avec ce même diametre. Pour cela il suffit de diviser cet angle en deux parties égales par la ligne* AM, *de mener du point* M, *où elle rencontre la parabole, l'ordonnée* MP *au diametre* AP. *Car l'abscisse & l'ordonnée sont évidemment égales au parametre*, par la précédente proposition.

65. *Si l'on n'avoit point l'angle de la tangente avec le diametre, mais seulement la parabole* MAN *avec son diametre* AP, *dont on voulût avoir le*

parametre, on chercheroit d'abord l'angle des ordonnées en cette maniere. Par un point quelconque R, *& par l'origine* A *du diametre on meneroit une droite indéfinie* RAQ ; *sur laquelle on prendroit une partie* AQ = AR : *par le point* Q *on meneroit* QN *parallele au diametre* AP, *jusqu'à ce qu'elle rencontrât la parabole en* N, *par le premier point* R *& le point* N, *on tireroit* RON *qui seroit ordonnée au diametre* AP ; *car à cause des paralléles* AP QN, *les triangles* RQN, RAO *sont semblables. Donc*

RQ : RA :: RN : RO

Mais RQ = 2RA *donc aussi* RN = 2RO. *Donc* ON = RO.

Enfin par le point A, *on meneroit la tangente* AT *paralléle à l'ordonnée* RN, *& l'on trouveroit le parametre comme dans la premiere partie de cette remarque.*

PROPOSITION XVI.

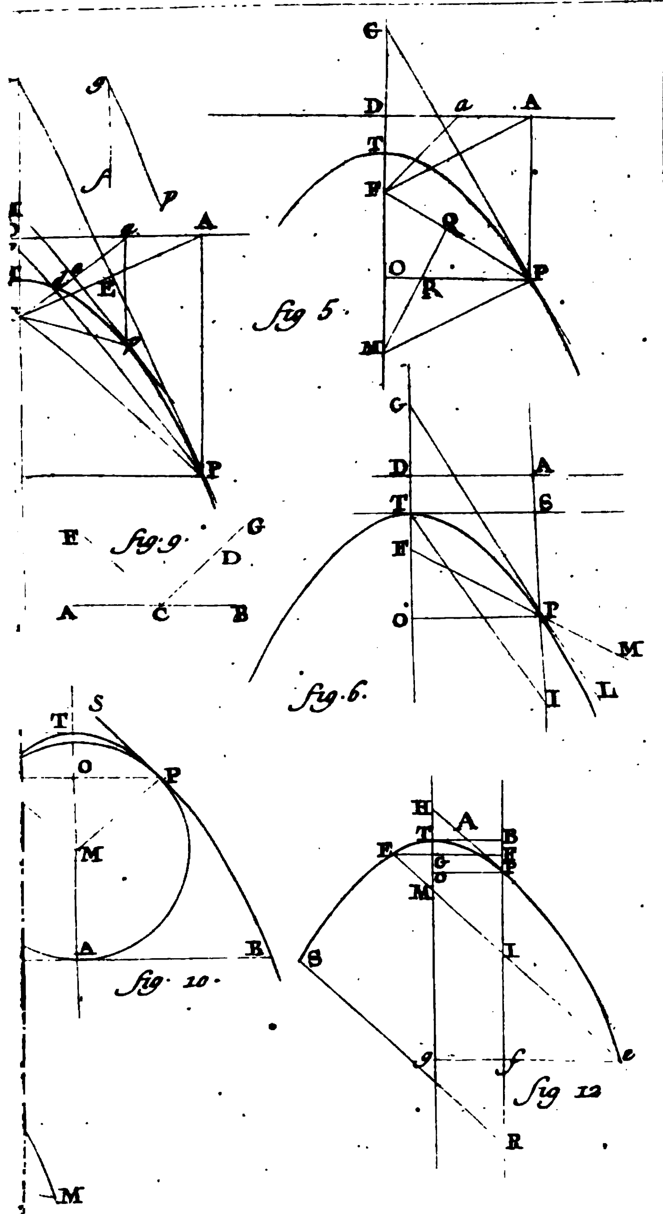
THÉOREME.

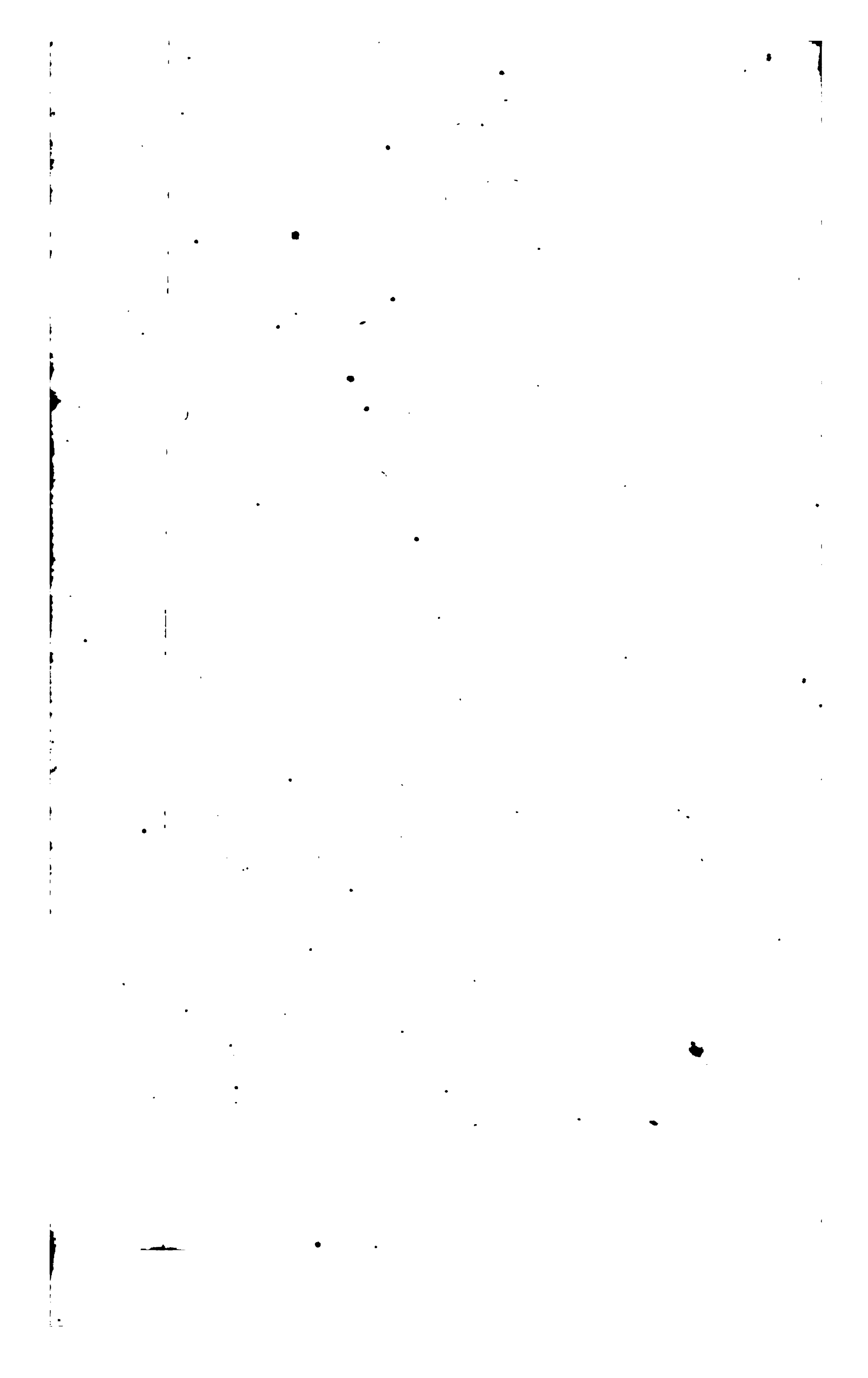
66. *Le parametre d'un diametre quelconque, est quadruple de la distance* SF *du sommet* S *de ce diametre, au foyer* F *de la parabole.* (Fig. 15).

DÉMONSTRATION.

1°, Si le diametre est l'axe même de la parabole, la proposition est évidente : car *par la définition du parametre de l'axe* on a $P = 4AF$.

2. Si c'est un autre diametre, comme SQ au point S, soit menée la tangente ST jusqu'à la rencontre de laxe en T ; soit abaissée la perpendiculaire


G
D
a
A
T
F
Q
O
P
R
M
fig 5.
g
f
p
A
e
E
P
E
fig. 9.
G
D
A
C
B
G
D
A
T
S
F
P
O
M
I
L
fig. 6.
S
T
O
P
M
A
B
fig. 10.
H
A
T
B
E
G
o
M
I
S
g
f
e
fig 12
R
M



perpendiculaire SP ordonnée à l'axe AF; soit menée la ligne SF au foyer : & par l'origine de l'axe A, l'ordonnée AG au diametre SQ, qui sera égale à la tangente ST, à cause du parallélogramme $AGST$. Le triangle SFT sera évidemment isocele; car à cause des paralléles AP, SQ l'angle $GSp = STA$, & par la propriété de la parabole, $GSp = FST$. Donc $SF = TF$: on a aussi, à cause de la tangente ST, $AP = AT$ donc $PT = 2AP$. Cela posé $AG^2 = TS^2 = SG \times PH$, en supposant que PH soit le parametre du diametre SQ : on a aussi à cause du triangle rectangle TPS. $TS^2 = PT^2 + PS^2 = 4AP^2 + AP \times 4AF$ car $PT = 2AP$. Et $PS^2 = AP \times 4AF$, *par la premiere proposition*. Donc $GS \times PH = 4AP^2 + AP \times 4AF = AP \times (4AP + 4AF.)$ Mais $GS = AT$ à cause des paralléles AP, SQ & $AT = AP$. Donc $GS = AP$, & divisant les deux membres de l'égalité par ces lignes égales; on a $PH = 4AP + 4AF = 4AT + 4AF = 4FT = 4FS$ puisque $FT = FS$; *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

67. L'expression du parametre de l'axe étant $4AF$, & celle du parametre d'un diametre quelconque $4AP + 4AF$, en supposant AP déterminé comme nous l'avons fait, il suit que le parametre d'un diametre quelconque surpasse celui de l'axe, du quadruple de l'abscisse d'une ordonnée correspondante à l'origine de

diametre. Ainsi connoissant le parametre de l'axe, on pourra toujours connoître celui de tout autre diametre donné.

Corollaire II.

68. Il suit évidemment de la même proposition que le parametre de l'axe est le plus petit de tous les parametres, puisque, si petite que soit l'abscisse d'une ordonnée menée par l'origine d'un diametre queleonque, son quadruple ajoûté à $4AF$ donnera toujours une quantité plus grande que $4AF$.

Corollaire III.

69. Si sur l'axe & sur un diametre quelconque, on prend des coupées égales, l'ordonnée au diametre sera plus grande que l'ordonnée à l'axe, puisque leurs quarrés sont égaux aux produits d'une même abscisse par des parametres différents, & que d'ailleurs *par la présente proposition*, le parametre du diametre est plus grand que celui de l'axe.

Corollaire IV.

70. Si par l'origine d'un diametre on mene une ordonnée SP à l'axe (Fig. 15.) & que par l'origine A de l'axe AP, on mene une ordonnée AG au diametre SQ ; les quarrés de ces ordonnées SP AG seront entr'eux comme les parametres de l'axe & du diametre. Supposant la tangente ST à l'origine du diametre, à cause du parallélogramme $AGST$, $AT = GS$ & par la pro-

priété de la sou-tangente $AT = AP$; donc $AP = GS$. Donc les abſciſſes de ces ordonnées sont égales. *Mais par la premiere propoſition* $SP^2 = AP \times 4AF$. Et *par le corollaire premier de la définition du parametre* $AG^2 = GS \times PH$. Donc $SP^2 : AG^2 :: AP \times 4AF : GS \times PH :: 4AF : PH$. en diviſant par $AP = GS$.

Corollaire V.

71. Puiſque l'on a $SP^2 : AG^2 :: 4AF : PH$, ſi l'on met à la place de SP^2 ſa valeur $AP \times 4AF$ & TS^2 à la place de AG^2; puiſque $AG = TS$, on aura $AP \times 4AF : TS^2 :: 4AF : PH$. Donc $TS^2 \times 4AF = PH \times AP \times 4AF$, & diviſant par $4AF$: il vient $TS^2 = PH \times AP$. D'où l'on tire $AP : TS :: TS : PH$. C'eſt-à-dire, que le parametre d'un diametre quelconque eſt troiſiéme proportionelle à l'abſciſſe AP & à la tangente TS menée par l'origine de ce diametre & terminée à l'axe; ce qui donne encore un moyen facile de trouver le parametre de ce diametre.

Remarque.

Ce corollaire eſt vrai, non-ſeulement par rapport à l'axe, mais encore par rapport à tout autre diametre.

Proposition XVII.

Théorême.

72. *Soit une parabole* RAS, *dont* AF *eſt l'axe*, F *le foyer*, SQ *un diametre quel-*

conque & KL *la directrice, si par le foyer* F *on mene une double ordonnée* RFQO *au diametre* SQ *: je dis que cette droite est égale au parametre du diametre* SQ. (Fig. 15.)

DÉMONSTRATION.

Par les extrémités OR de cette double ordonnée, soient menées les perpendiculaires ON RX à la directrice NKX : soit de plus prolongé le diametre SQ jusqu'à ce qu'il rencontre la directrice en L. On aura *par la génération de la parabole* $OF=ON$ & $RF=RX$. Donc $OF+FR=ON+RX$, & à cause que les côtés RO NX du trapese $XRON$ sont coupés en deux également aux points QL : on aura $LQ=\frac{ON+RX}{2}=\frac{OF+FR}{2}=QR$. Présentement à cause du parallélograme $TFQS$ qui est divisé en deux triangles égaux & semblables par la diagonale FS, il est évident que le triangle FSQ est isocele, puisque le triangle son égal TFS a été démontré isocele dans la précédente proposition : donc $FS=SQ$. Mais *par la propriété de la parabole* $FS=SL$ donc LQ ou $QR=2FS$. Donc $2QR$ ou $OR=4FS$ que l'on a démontré dans la précédente être le parametre du diametre LQ. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

73. Si l'on imagine que le diametre LQ s'approche de l'axe AF, & qu'enfin il se confonde avec lui, la double ordonnée RO de-

viendra la double ordonnée mFM qui sera aussi égale au parametre de l'axe. Ainsi la proposition est générale.

On peut démontrer ce corollaire plus directement ; car *par la premiere proposition* on a $FM^2 = AF \times 4AF = 4AF^2$ donc $FM = 2AF$; donc mFM ou $2FM = 4AF$.

REMARQUE.

74. *Puisque l'on a démontré que* SQ = SF, *on aura* 4SQ = 4SF, *c'est-à-dire que le parametre d'un diametre est égal au quadruple de l'abcisse* SQ *correspondante à l'ordonnée au même diametre, qui passe par le foyer de la parabole ; ce qui donne un moyen facile de trouver le parametre d'un diametre, lorsqu'on connoît le foyer de la parabole, & l'angle de ce diametre avec ses ordonnées.*

75. *Réciproquement, connoissant un diametre quelconque, l'angle que fait avec lui la tangente à son origine, & le parametre de ce diametre; on pourra toujours trouver le foyer de la parabole, son axe & sa directrice.*

De l'origine S *du diametre, on prendra une partie* SQ *égale au quart du parametre, par le point* Q *on menera une droite* QR *indéfinie paralélle à la tangente; du point* S *comme centre & rayon* SQ, *on décrira un arc de cercle qui coupera* QR *au point* F *qui sera le foyer demandé. La ligne* FP *menée par ce même point* F *parallélement au diametre sera l'axe de la parabole ; enfin prolongeant* SQ *en* L, *ensorte que* SQ = SL, *la perpendiculaire* LK *qui sera élevée à*

ce point, sera évidemment la directrice. Car par la construction on a SQ=SF *; mais* SQ=SL *donc* SF=SL *qui est la principale propriété de la parabole par rapport à la directrice.*

76. *Il est encore évident que tout parametre est égal à quatre fois la distance* SL *du sommet* S *de son diametre à la directrice* KL.

PROPOSITION XVIII.

Théorème.

77. *Si par un point* E *d'une porobole (fig. 16.) on mene une tangente* EQ *qui rencontre quelque diametre* PQ *en* Q, *& par le même point* E *une ordonnée* EI *au même diametre. Je dis que* PQ=PI.

Démonstration.

Soit TF l'axe de la parabole, BTA tangente à l'origine de l'axe & PH tangente en P & parconséquent paralléle à EI, par la *treiziéme proposition*. Par le point T soit aussi menée TD paralléle à cette même PH. On aura $PD=PB$. Car à cause des paralléles, $PHMD$, PI MH; $PD=TH$ mais $TH=TO$. *Par la propriété de la tangente* PH & $TO=PB$ à cause du parallélogramme $TOPB$. Donc $PD=PB$ donc $BD=2PB=2TO$. Enfin par les points M, E, P soient menées les droites ML, EG, PO paralléles à TB. *Par le corollaire troisiéme de la premiere proposition*, on a, PO^2 ou $BT^2 : EG^2 :: TO : TG$

$TO : TG :: BD : MG$;

Puisque $BD=2TO$ & que $MG=2TG$; & à

cause des triangles semblables EGF TBD on a aussi,

$$BT^2 : EG^2 :: BD^2 : GF^2.$$

Donc $BD^2 : GF^2 :: BD : MG$ & partant $BD \times GF^2 = BD^2 \times MG$ & divisant chaque membre de l'équation par BD, on a $GF^2 = BD \times MG$. Donc $BD : GF :: GF : MG$, c'est-à-dire que GF est moyenne proportionelle entre BD & MG.

De même à cause des triangles semblables

EGM, MLQ : on aura

BT^2 ou $ML^2 : EG^2 :: QL^2 : MG^2$

donc $QL^2 : MG^2 :: BD : MG$

& partant $QL^2 \times MG = MG^2 \times BD$ & divisant par MG, on a $QL^2 = MG \times BD$ d'où l'on tire $BD : QL :: QL : MG$.

Donc $GF = QL$ puisque chaque ligne est moyenne proportionelle entre les mêmes BD MG. Mais à cause des paralléles $LB = MT = TG$ à cause de la tangente EM donc

$$GF + TG = QL + LB \text{ ou } TF = QB.$$

De même $BP = TO = TH$ à cause de la tangente PH. Donc $TF + TH = QB + BP$ & réduisant FH ou $PI = PQ$ car à cause du parallélogramme $PIFH$; on a $FH = PI$ *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *On démontrera de même que si d'un point* e *de la parabole* (Fig. 17.) *on mene une tangente* eqm *rencontrant un diametre en* q *&* *du même point* e, *l'ordonnée* ei *à ce même diametre, les parties* Pq Pi *seront égales.*

Cit

DÉMONSTRATION.

78. Soit abaissée du point e l'ordonnée à l'axe eg. Soit prolongé le même axe jusqu'à ce qu'il rencontre la tangente en m. Soit menée ml perpendiculaire au diametre PQ aussi prolongé en l, s'il est nécessaire. *Cela posé par le corollaire troisiéme de la premiere proposition* on a

PO^2 ou $BT^2 : eg^2 :: TO : Tg :: BD : mg$

puisque $BD = 2TO$ & que $mg = 2Tg$. & à cause des triangles semblables TBD egf.

On a $BT^2 : eg^2 :: BD^2 : gf^2$

Donc $BD^2 : gf^2 :: BD : mg$.

Donc $BD^2 \times mg = BD \times gf^2$

Donc $BD^2 \times mg = gf^2$.

De même à cause des triangles semblables egm, mlq on a l'analogie

ml^2 ou $BT^2 : eg^2 :: lq^2 : mg^2$.

Donc $lq^2 : mg^2 :: BD : mg$

donc $BD \times mg^2 = mg \times lq^2$

donc $BD \times mg = lq^2$ en divisant par mg.

Mais nous avons $BD \times mg = gf^2$ donc $lq^2 = gf^2$ & partant $lq = gf$: à cause du parallélogramme $lBTm$ & de la tangente em on a $Bl = Tm = Tg$.

Donc $lq - Bl = gf - Tg$, ou $Bq = Tf$. Il est encore visible que l'on a Og ou $Pr = mH$. Car $Tg = Tm$ & $TO = TH$.

donc $Tg - TO = Tm - TH$ ou $Og = mH$.

Donc $mT - mH - Tf = Br - Pr - Bq$ & réduisant $fH = Pq$, mais à cause du parallélo-

gramme $fHPi$ on a $fH = Pi$, donc $Pi = Pq$.
Ce qu'il falloit démontrer.

DEFINITION.

79. La droite IQ comprise entre l'ordonnée EI à un diametre PI, & la rencontre du même diametre par la tangente en E s'appelle *sous-tangente* par rapport au diametre PI.

COROLLAIRE I.

80. Donc les soutangentes d'un diametre quelconque ont les mêmes propriétés que celles de l'axe, puisque l'on a $PQ = PI$. Ainsi l'on peut établir généralement que toute soutangente est double de l'abscisse correspondante à l'ordonnée menée par le point touchant, & elle sert aux mêmes usages que la soutangente de l'axe.

COROLLAIRE II.

81. On peut encore se convaincre aisément de la généralité du corollaire 5eme de la 16 proposition (*num.* 71.)

Soit une parabole RAS (fig. 18.) *dont* AP SQ *sont deux diametres quelconques, si par les points* A, S *origines de ces diametres on mene les ordonnées* AG, SP *paralléles aux tangentes en ces mêmes points, le parametre du diametre* SQ *est troisiéme proportionelle à l'abscisse* AP *& à la tangente* TS.

DÉMONSTRATION.

Par la présente proposition à cause *de la tan-*

gente ST, $AP = AT$, mais $AT = GS$ à cause du parallélogramme $AGST$.

Donc $SP^2 : AG^2 :: AP \times P : GS \times p :: P : p$. puisque les abscisses AP, GS sont égales, & mettant à la place de SP^2 sa valeur $AP \times P$ & à la place de AG^2, TS^2 qui lui est égal

on a $AP \times P : TS^2 :: P : p$

donc $AP \times P \times p = TS^2 \times P$

donc $AP \times p = TS^2$ d'où l'on tire

$AP : TS :: TS : p$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XIX.

Théorème.

82. *Si l'on a deux droites* AB MN, (*Fig.* 19 & 20.) *qui se coupent en un point* O, *au-dedans ou au-dehors de la parabole, & que, par les milieux* D C *de ces droites on tire les diametres* LD, QC, *dont les parametres soient* P, p *Je dis que l'on aura* $AO \times OB : MO \times ON :: P : p$.

Démonstration.

Par le point O ou se coupent les sécantes AB MN, soit mené le diametre OK. Par le point K ou ce diametre rencontre la parabole soient menées les ordonnées KF, KG aux diametres LD, QC. On aura *par la quatorziéme proposition.* (*num.* 55.)

$AD^2 : KF^2 :: LD : LF$.

& divid. $AD^2 - KF^2 : KF^2 :: LD - LF : LF$.

& dans le cas, où le point O est au-dehors de la parabole.

$$KF^2 - AD^2 : KF^2 :: LF - LD : LF.$$

Mais AB étant paralléle à KF aussibien que KS à LD, on aura $KF = OD$ donc

$$AD^2 - KF^2 = AD^2 - OD^2 = AO \times OB$$

par le lemme fondamental; puisque AB est divisé en deux parties égales en D, & en deux parties inégales en O.

Donc $AO \times OB : KF^2 :: FD : LF$.

Donc $AO \times OB : KF^2 :: FD \times P : LF \times P$.

Mais (*num.* 57.) $KF^2 = LF \times P$

Donc $AO \times OB = FD \times P$.

On démontrera de même que $MO \times ON = GC \times p$. Donc $AO \times OB : MO \times ON :: FD \times P : GC \times p$. Mais à cause des parallélogrammes $KOCG$ $KODF$, $GC = KO = FD$, donc en divisant l'antécédent & le conséquent de la seconde raison par les égales FD GC, on aura $AO \times OB : MO \times ON :: P : p$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

83. Si l'on imagine que les sécantes intérieures se meuvent parallélement à elles mêmes, jusqu'à ce qu'elles deviennent tangentes aux points LQ; alors les produits $AO \times OB$, $MO \times ON$; deviendront les quarrés de ces tangentes; d'où il suit que ces quarrés seront entr'eux comme les parametres des diametres qui passent par les points touchants. Donc $RL^2 : QR^2 :: P : p$. Donc aussi $AO \times OB : MO \times ON :: RL^2 : QR^2$.

COROLLAIRE II.

84. Si par les points Q L, origine du diametres qui passent par le milieu des sécantes on mene les ordonnées à ces diametres Qq Ll. On a (*num.* 81) $Qq^2 : Ll^2 :: P : p$ & (*num.* 83.)
$$RL^2 : QR^2 :: P : p$$
Donc $RL^2 : QR^2 :: Qq^2 : Ll^2$.
Donc $AO \times OB : MO \times ON :: Qq^2 : Ll^2$.
C'est-à-dire que les produits des sécantes AB MN, sont entr'eux comme les quarrés des ordonnées aux diametres qui les divisent en deux egalement, menées par l'origine de ces mêmes diametres.

COROLLAIRE III.

85. Si les diametres qui divisent les sécantes en deux par les égales sont également éloignés de l'axe, leurs parametres seront égaux, puisque la parabole est une courbe symetrique, & alors les produits $AO \times OB$, $MO \times ON$ seront égaux, & les droites AB MN seront coupées en parties réciproques soit au-dedans, soit au-dehors de la parabole.

COROLLAIRE IV.

86. Si une des lignes étant toujours sécante (Fig. 20.) l'autre devient tangente en L. Alors le quarré de la tangente sera au produit de la sécante entiere par sa partie extérieure, comme le parametre du diametre qui passe par le point touchant L, est à celui du

diametre qui divise MN en deux parties égales ; & l'on aura $Lo^2 : Mo \times oN :: P : p$. Et si $P = p$, alors la tangente sera moyenne proportionelle entre la sécante entiere & sa partie extérieure ; d'où il suit que l'on peut trouver une moyenne proportionelle entre deux lignes données par le moyen de la parabole, ce qui seroit pourtant un défaut en géometrie, puisque le cercle donne un moyen plus court & plus facile.

Seulement il est à remarquer que cela ne peut arriver que lorsque le point de rencontre de la tangente & de la sécante est à droite ou à gauche de l'axe, & jamais lorsqu'il est sur l'axe ; parceque dans le cas où les parametres sont égaux, il n'y a que des tangentes ou des sécantes égales qui puissent se rencontrer sur l'axe.

Corollaire. V.

87. On a démontré dans cette proposition (fig. 19.) que l'on avoit toujours $AO \times OB = FD \times P$. Mais $FD = KO$ à cause des paralléles AD FK donc $AO \times OB = KO \times P$ d'où il suit que.

1° Si l'on a un autre diametre XY qui coupe la même ligne AB au point Y ; on auroit cette analogie $AO \times OB : AY \times YB :: KO : XY$. Car on démontrera de même que l'on auroit $AY \times YB = XY \times P$. Ce qui suffit pour déduire la proposition présente.

2° Si deux lignes AB VT paralléles entr'elles sont coupées par un même diametre OKS, on aura

$$AO \times OB : VS \times ST :: KO : KS.$$

Car on démontrera de même que dans la présente proposition que $VS \times ST = KS \times P$.

3° Si deux lignes AB, VT paralléles entr'elles sont coupées par deux diametres differens KO, XZ, on aura cette proportion

$$AO \times OB : VZ \times ZT :: KO : XZ.$$

Car puisque VZ est paralléle à AB, elle sera aussi ordonnée au diametre LD, donc $VZ \times ZT = XZ \times P$ en supposant que P est le parametre du diametre LD mais $AO \times OB = KO \times P$ parametre du même diametre; donc $AO \times OB : VZ \times ZT :: KO \times P : XZ \times P :: KO : XZ$.

Il faut bien remarquer que le parametre dont on se sert dans tous ces corollaires, est le parametre du diametre qui divise la sécante AB *ou ses paralléles en deux également.*

Corollaire VI.

88. On voit par là comment on peut décrire une parabole (Fig. 19.) qui passe par trois points donnés A, K, B, & dont les diametres soient paralléles à une ligne donnée de position.

Car ayant joint deux points comme A, B par la droite AB & menant par le troisiéme point donné K, une ligne KO paralléle à la ligne donnée de position, qui coupera AB en O, puis menant encore par le milieu de AB, la droite indéfinie DL paralléle à KO : on fera cette proportion.

$KO : AO :: OB : P$. Cette quatriéme

proportionelle aux trois lignes données KO; AO, OB sera le parametre du diametre LD avec lequel on pourra décrire la parabole demandée.

Il eſt évident que cette parabole paſſera par les points A, B puiſque $AD \times DB = AD^2 = LD \times P$. Elle paſſera auſſi par le point K car *par la conſtruction*, on a $AO \times OB = KO \times P$. & *par la propoſition préſente* cette propriété convient à la parabole qui a LD pour diametre & AB pour double ordonnée; d'ailleurs le même diametre eſt parallele à la ligne donnée de poſition. Donc cette parabole remplit toutes les conditions propoſées.

REMARQUE.

89. *Comme la ligne à laquelle les diametres doivent être paralléles peut varier à l'infini dans ſa poſition, il ſuit que par trois points donnés, on peut faire paſſer une infinité de paraboles différentes. Donc pluſieurs paraboles peuvent ſe couper en trois points ſans ſe confondre; ce qui n'eſt pas vrai pour le cercle.*

90. *On voit aiſément* (Fig. 20.) *que ſi le point* K *étoit tel que la ligne* OK *menée parallélement à la ligne donnée de poſition rencontrât la ligne* AB *prolongée en* O, *le problême ſeroit toujours le même & ſe réſolveroit de la même maniere.*

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

91. *Si une ſécante quelconque* MN (Fig. 21).

prolongée au-dehors de la parabole rencontre un diametre AR *quelconque en un point* R *& que des points* MN, *on mene les ordonnées* MP NQ *au diametre* AR, *je dis que l'on aura*

$$AP : AR :: AR : AQ.$$

DÉMONSTRATION.

Les ordonnées MP QN étant paralléles les triangles RMP, RNQ feront femblables & donneront $RP^2 : RQ^2 :: PM^2 : QN^2$
& *par la pro.* 14. $PM^2 : QN^2 :: AP : AQ$.
Donc $RP^2 : RQ^2 :: AP : AQ :: RP - AR : RQ - AR$, car $AP = RP - AR$ & $AQ = RQ - AR$.
Donc
$RP^2 \times RQ - RP^2 \times AR = RQ^2 \times RP - RQ^2 \times AR$.
Et en tranfpofant
$RP^2 \times RQ - RP \times RQ^2 = RP^2 \times AR - RQ^2 \times AR$.
ou $RP \times RQ \times (RP - RQ) = AR \times (RP^2 - RQ^2)$
$= AR \times (RP + RQ) \times (RP - RQ)$ puifque *par le lemme fondamental*,
$RP^2 - RQ^2 = (RP + RQ) \times (RP - RQ)$ donc en divifant chaque terme par $RP - RQ$;
$RP \times RQ = AR \times (RP + RQ)$ d'où l'on tire
$RP + RQ : RP :: RQ : AR$.
Mais $RP = AR + AP$, & $RQ = AR + AQ$; donc en fubftituant ces valeurs
$2AR + AP + AQ : AR + AP :: AR + AQ : AR$.
D'on l'on tire dividendo
$AR + AQ : AR + AP :: AQ : AR$.
Donc $AR^2 + AQ \times AR = AR \times AQ + AP \times AQ$ ôtant de part & d'autre $AR \times AQ$ on a $AR^2 = AP \times AQ$ d'où l'on tire $AP : AR :: AR : AQ$.
Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire

COROLLAIRE.

92. Si l'on imagine que les points M, N se rapprochent l'un de l'autre, jusqu'à ce qu'ils se confondent au même point S ; & que les points P, Q se rapprochent de même jusqu'à ce qu'ils se confondent aussi en O : on aura alors $AP = AQ = AO$; AR deviendra AT, & la sécante MN deviendra la tangente ST ; enfin l'équation $AR^2 = AP \times AR$ deviendra $AT^2 = AO^2$: donc $AT = AO$, c'est-à-dire que la partie d'un diametre comprise entre son origine & une tangente ; est égale à l'abscisse correspondante à l'ordonnée au même diametre, laquelle passe par le point touchant S.

REMARQUE.

Ce corollaire est une démonstration fort simple de la 18eme proposition, & on le met ici pour faire voir comment on arrive au même résultat par des voies qui paroissent toutes différentes. Cette proposition ainsi que la suivante donnent une maniere fort simple de trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données par le moyen d'une parabole déterminée.

Car ayant pris sur un diametre quelconque AQ les abscisses AP, AQ égales aux proposées & mené les ordonnées PM, QN au même diametre, le point R où il est coupé par la ligne qui joint les extrémités M, N des ordonnées PM, QN sera celui qui détermine la moyenne demandée ; comme il est évident. (*fig.* 21 & 22).

PROPOSITION XXI.

THÉOREME.

93. *Si un diametre quelconque* A Q *est coupé* (Fig. 22) *dans un point* R *au dedans de la parabole par une droite* M N *terminée à cette même parabole, & si des points* M, N *l'on abaisse les ordonnées* MP, NQ *à ce diametre, paralleles à la tangente en* A; *je dis que l'on aura* AP:AR::AR:AQ. *Et encore* MP : RS :: RS : QN.

DÉMONSTATION.

1°. A cause des triangles semb. MPR, NQR. $RP^2:RQ^2::MP^2:NQ^2$ & par la 14eme. *proposition* $MP^2:NQ^2::AP:AQ::AR-RP:AR+RQ$. Car $AP=AR-RP$ & $AQ=AR+RQ$. Donc $RP^2:RQ^2::AR-RP:AR+RQ$. Donc multipliant les extrêmes & les moyens $RP^2\times AR+RP^2\times RQ=RQ^2\times AR-RQ^2\times RP$ & *transposant* les termes $RP^2\times RQ$, $RQ^2\times AR$, $RP^2\times AR-RQ^2\times AR^2=-RP^2\times RQ-RQ^2\times RP$ ou bien en réduisant chaque membre $(RP^2-RQ^2)\times AR=-RP^2\times RQ\times(RP+RQ)$; & en divisant encore chaque membre par $RP+RQ$; $AR\times(RP-RQ)=-RP\times RQ$; ou *multip.* & *transpo.* $RP\times AR=RQ\times AR-RQ\times RP$, d'où l'on tire $AR-RP:AR::RP:RQ$. Mais $RP=AR-AP$ & $RQ=AQ-AR$; donc en *substituant ces valeurs*, $AP:AR::AR-AP:AQ-AR$. Donc en prenant le produit des extrêmes & des moyens $AP\times AQ-AP\times AR=AR^2-AP\times AR$, d'où l'on tire $AP\times AQ=AR^2$, ôtant de chaque membre $AP\times AR$, & enfin $AP:AR::AR:AQ$. C. Q. F. 1°. D.

2° $MP:RS::RS:NQ$. Car *par la* 14. *proposition* $MP^2:RS^2:NQ^2::AP:AR:AQ$.
Donc $MP^2:RS^2::RS^2:NQ^2$. Puisque *par la* 1ere *partie de la présente proposition* on a $AP:AR::AR:AQ$. Donc en tirant les racines $MP:RS::RS:NQ$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XXII.

Théoreme.

94. *Si sur le prolongement de l'axe* (fig. 23.) *on prend une partie* TH *égale au parametre, & que par l'origine du même axe on mene une corde quelconque* TP *& par le même point* P *l'ordonnée* PO *: je dis que l'on aura pour chaque corde* HO : TP : : TP : TO.

Démonstration.

A cause du triangle rectangle TOP on a $PT^2 = TO^2 + PO^2$; mais par la propriété de la parabole & du parametre $PO^2 = TO \times TH$ puisque TH est supposé égal au parametre. Donc $PT^2 = TO^2 + TO \times TH = (TH + TO) \times TO = HO \times TO$.
Donc $HO:PT::PT:TO$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XXIII.

Théorème.

95. *Si l'on prend un point* F, (fig. 24.) *sur la perpendiculaire* DO *abaissée de l'angle droit d'un triangle isocele rectangle, sur l'hypothénuse* BC, *si l'on divise cette ligne* DF *en deux parties égales en* T, *& que du point* F *comme centre & pour rayon* OB *moitié de la base* BC *on décrive*

une portion de cercle qui la coupe en deux points P p ; *je dis que ces points seront à une parabole dont* DO *sera l'axe*, F *le foyer* & T *le sommet.*

DÉMONSTRATION.

A cause du triangle rectangle POF, on a $PO^2 = FP^2 - FO^2 = BO^2 - FO^2 = DO^2 - FO^2$, car le triangle rectangle BOD est aussi isocele & partant $BO = DO$, mais $DO = DF + FO$.
Donc $DO^2 = DF^2 + 2DF \times FO + FO^2$
Donc $PO^2 = DF^2 + 2DF \times FO + FO^2 - FO^2$
ce qui se réduit à $PO^2 = (DF + 2FO) \times DF$.
On a aussi $DF = 2FT$, puisque *par la supposition*, DF est coupée en deux parties égales en T ; donc $PO^2 = (2FT + 2FO) \times 2FT$ ou, ce qui revient au même $PO^2 = (FT + FO) \times 4FT$. Mais $FT + FO = TO$. Donc $PO^2 = TO \times 4FT$. D'où il suit que le point P, est à une parabole qui a pour axe FD & dont $4FT$ est le parametre, & partant, le point F est le foyer de la parabole puisqu'il est éloigné du sommet de cette courbe du quart de son parametre (*num.* 13).

CÔROLLAIRE I.

96. Si par le point D on mene une droite AD parallèle à la base BC, il est évident que cette droite sera la directrice de la parabole qui a la ligne OD pour axe ; puisque cette ligne est éloignée du sommet de la parabole du quart du parametre de l'axe.

COROLLAIRE II.

97. Si par un point *o* on mene une droite *boc* parallèle à la base *BC* du triangle donné, il est clair que l'on pourra trouver sur cette ligne deux points *R* & *r* qui appartiendront à la même courbe; en décrivant du point *F* comme centre avec le rayon *ob*, les petits arcs *R*, *r*. D'où il suit que l'on peut déduire de cette proposition une méthode fort simple de décrire la parabole; comme on verra dans les descriptions de cette courbe.

PROPOSITION XXIV.

PROBLÊME VI.

98. *Trouver la surface d'une portion de parabole terminée par une double ordonnée à l'axe* MPN *: & par cette courbe.*

SOLUTION.

Pour arriver plus facilement à la solution de ce problême nous observerons.

1° Que la parabole étant une courbe simétrique & divisée en deux parties égales par l'axe, le problême se réduit à trouver la surface du triangle parabolique *TPM*.

2° Nous imaginerons que ce même triangle est composé d'une infinité de petits parallélogrammes *MPpm*, formés par des ordonnées infiniment proches *MP*, *mp*. Cette fausse supposition ne peut faire aucune erreur, parce que le triangle *MmO* qu'il faudroit ajoûter ou

retrancher pour faire un parallélogramme complet est infiniment petit par rapport au trapeze *M Ppm*, que nous appellerons *élément parabolique.*

3° Nous supposerons encore que le triangle mixtiligne concave *TQM*, formé par la courbe *TM* la tangente *TQ* à l'origine de l'axe & la droite *MQ* menée par le point *M* parallélement à l'axe, nous supposerons dis-je que ce triangle, que nous appellons *complément parabolique*, est composé d'une infinité de petits parallélogrammes *MQRm* que nous nommerons *élémens de complément parabolique*, formés par des lignes *MQ mR* menées des extrémités *M m* des ordonnées infiniment proches *MP*, *mp* perpendiculairement à la tangente en *T*. Cette seconde supposition ne peut encore causer aucune erreur, puisque le triangle *Mom* d'où elle pourroit provenir, est supposé plus petit que toute grandeur assignable, & n'est par conséquent d'aucune considération.

4° Nous imaginerons que la courbe est composée d'une infinité de petites lignes droites comme *Mm* dont la tangente *MH* est le prolongement.

5° Enfin on élevera au point *H* où la tangente rencontre l'axe, la droite *HG* parallélé à la tangente en *T* & l'on prolongera les droites *MQ mR*, jusqu'à ce qu'elles rencontrent cette ligne aux points *FG*.

Tout cela posé, il est évident que le trian-

gle MmO eſt ſemblable au triangle MPH, puiſque ces triangles ont les côtés paralléles chacun à chacun. Donc on aura la proportion

$$MP : PH :: MO : Om.$$

Donc $MP \times Om = PH \times MO = MO \times OF$ car à cauſe des paralléles MP GH, $PH = OF$. Mais à cauſe de l'angle droit oMp, le rectangle $MP \times Om$ eſt égal à l'élément parabolique $MPpm$, & le rectangle $MO \times OF$ eſt égal au parallélogramme $MOFG$ qui eſt lui-même égal à l'élément parabolique, puiſque $MP \times Om = MO \times OF$. Préſentement à cauſe des paralléles MG OF, les rectangles $MOFG$ $MORQ$, compris entre ces paralléles donnent $MOFG : MORQ :: OF : OR :: HP : PT :: 2 : 1$ *par la propriété de la ſou-tangente* (*num.* 29.) Donc $MOFG = MPpm : MORQ = MmRQ :: 2 : 1$. C'eſt-à-dire que l'élément parabolique eſt double de l'élément du complement parabolique; & comme on démontrera la même choſe de tout autre élément parabolique, par rapport à l'élément de complement correſpondant, on aura la ſomme des éléments paraboliques, eſt à la ſomme des éléments de complément, comme un ſeul élément, eſt à ſon complément ou comme 2 à 1 ou bien

$$TPM : TQM :: 2 : 1$$

donc en compoſant

$$TPM : TPM + TQM :: 2 : 2 + 1,$$

ou $TPM : TPMQ :: 2 : 3$.

On démontrera de même que

$$TPN : TPNq :: 2 : 3$$

d'où il suit que la surface d'un segment parabolique $TMPN$ terminée par la courbe & une double ordonnée à l'axe est égal aux deux tiers du rectangle de l'abscisse PT par la double ordonnée MN. *Ce qu'il falloit trouver & démontrer.*

PROPOSITION XXV.

PROBLÉME VII.

99. *Trouver la surface d'un segment parabolique terminé par le perimetre de la parabole & par une double ordonnée* MPN *à un diametre quelconque.*

SOLUTION.

Ayant fait toutes les mêmes suppositions (Fig. 26.) que dans le problême précédent avec les changemens convenables, on verra que la solution est précisément la même. Car les parallélogrammes obliquangles $OMFG$ $oMPp$ seront toujours égaux ayant un angle égal compris entre côtés réciproques, puisque les triangles MPH MOm sont toujours semblables. D'ailleurs l'élément parabolique sera toujours double de l'élément du complément puisque les parallélogrammes $MOFG$ $MOQR$ qui leur sont égaux, sont entr'eux comme HP à TP, ou comme 2 à 1, (*num.* 77.) & à cause des parallèles MG, OF entre lesquelles ils sont compris: d'où il suit évidemment que l'on a comme dans la proposition précédente le segment parabolique, égal aux deux tiers

du parallélogramme $MQqN$ fait sur l'abſciſſe PT & la double ordonnée MN au diametre PH. *Ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE. I.

100. Donc le demi complément paraboli-que TMQ eſt égal au tiers du parallélogramme $TPMQ$ & l'autre demi complément parabolique TNq eſt égal au tiers du parallélogramme $TPNq$ & partant la figure concave $QMTNq$ eſt égale au tiers du parallélogramme $MNqQ$.

COROLLAIRE II.

101. Si par le point T (Fig. 27), origine du diametre, on mene aux extrémités MN de la double ordonnée MPN, les droites TM, TN, le triangle MTN ſera égal à la moitié du parallélogramme $MQqN$, ou, ce qui revient au même, ſera les $\frac{3}{6}$ de ce parallélogramme dont le ſegment parabolique $MZTN$ eſt les deux tiers, ou les $\frac{4}{6}$: donc

$$MZTN : MTN :: \tfrac{4}{6} : \tfrac{3}{6} :: 4 : 3.$$

COROLLAIRE. III.

102. Si l'on a deux ſegments parabolique TMN, TVS (Fig. 27.) terminés par le perimetre de la parabole & par des doubles ordonnées MN, VS à un même diametre; ces ſegments ſeront entr'eux comme les triangles MTN, VTS ; car ces triangles ſont moitiés des parallélogrammes formés ſur les abſciſſes TP TX & les doubles ordonnées MN VS.

C'est-à-dire que les paraboles *AFB*, *MQN* sont entr'elles comme *KL* & *IH*. D'ailleurs la derniere *MQN* a pour base la droite *MN*. Donc elle a toutes les conditions réquises.

DÉFINITION.

106. deux segments paraboliques sont *semblables*, lorsqu'on peut leur inscrire des poligones semblables d'un même nombre de côtés.

PROPOSITION XXVIII.

THÉOREME.

107. *Si deux segments paraboliques* ACB, acb (Fig. 30). *sont tels qu'on ait* ; AB : CD : : ab : cd, *en supposant que les droites* AB ab *sont les doubles ordonnées des diametres* CD cd *qui font avec elles les angles égaux* ADC adc, *je dis que ces segments sont semblables.*

DÉMONSTRATION.

Soient joints les points *A*, *C*, *B* par les droites *AC*, *CB*, & les points *a*, *c*, *b* par les droites *ac*, *cb* : puisque les droites *AD* *ad* sont ordonnées aux diametres *CD* *cd*, elles seront coupées en deux également (*par la* 13eme *proposition*), & comme (*hyp.*) on a *AB* : *CD* : : *ab* : *cd*, on aura aussi, *AD* : *CD* : : *ad* : *cd*, d'où il suit que les triangles *ADC*, *adc* sont semblables ayant les angles égaux *D*, *d* compris entre les côtés proportionels. Il est évident, par la même raison, que les trian-

gles *CDB cdb* ſont auſſi ſemblables, donc le triangle total *ACD*, inſcrit au ſegment parabolique *ACB*, eſt ſemblable au triangle total *acb* inſcrit pareillement au ſegment parabolique *acb* ; & partant les ſegments eux-mêmes ſont ſemblables, *par la définition précédente : Ce qu'il falloit démontrer.*

108. *Si par un point* F *quelconque du diametre* CD *on mene une droite* GFH *parallele à* AB, *& qu'ayant fait cette proportion*, CD : CF :: cd : cf, *par le point* f *ainſi déterminé ſur le diametre* cd, *on mene la droite* gfh *parallele à* ab, *on démontrera aiſément que le pentagone* AGCHB *inſcrit au ſegment parabolique* ACB, *eſt ſemblable au pentagone* agchb *inſcrit au ſegment parabolique* acb.

DÉMONSTRATION.

Les lignes *GF AD* étant ordonnées au diametre *CD* ainſi que les droites *gf ad* au diametre *cd*, on aura *par la* 14eme *propoſition*,

$AD^2 : GF^2 :: CD : CF$ *& par hypotheſe*

$CD : CF :: cd : cf$

& par la propoſition 14. $cd : cf :: ad^2 : gf^2$.

Donc $AD^2 : GF^2 :: ad^2 : gf^2$, donc $AD : GF :: ad : gf$. D'où il ſuit que les triangles *GFC*, *gfc* ſont ſemblables, puiſqu'ils ont les angles égaux *Ff* compris entre les côtés proportionels *GF CF*, *gf cf*. Donc les angles *GCF gcf* ſeront égaux & ôtant de ces angles égaux, les angles *ACF acf*, auſſi égaux, à cauſe des triangles ſemblables *CAD cad*, on aura les angles *GCA gca*, qui ſeront auſſi égaux &

nous donnent deux nouveaux triangles semblables *GCA gca*, puisqu'ils sont compris entre les côtés proportionels *AG GC. ag gc*; comme il est évident à cause des triangles semblables *ADC adc*, *GFC gfc*. On démontrera de même que le triangle *CBH* est semblable au triangle *cbh*, d'où il suit que les pentagones *AGCHB*, *agchb*, sont composés de triangles semblables & partant aussi semblables entr'eux; & par conséquent il est encore démontré que les segments paraboliques auxquels ils sont inscrits, sont semblables.

Corollaire I.

109. Puisque deux segments paraboliques sont semblables lorsqu'on peut leur inscrire des figures semblables d'un même nombre de côtés, réciproquement lorsque deux segments paraboliques sont semblables, il sera toujours possible de leur inscrire des figures semblables d'un même nombre de côtés.

Corollaire II.

110. Toutes les paraboles sont des figures semblables, car on pourra toujours leur donner des bases proportionelles à leurs hauteurs.

Corollaire III.

111. Puisque les paraboles sont des figures semblables : elles ont aussi les mêmes propriétés que les figures semblables; donc elles sont entr'elles comme les quarrés des côtés homo-

logues, des lignes semblablement tirées des parametres, par exemple, des tangentes, abscisses ou ordonnées correspondantes ; ce qui se doit entendre non-seulement des segments paraboliques semblables & déterminés, mais encore des espaces indéfinis renfermés par les paraboles prolongées aussi loin qu'on puisse les imaginer.

PROPOSITION XXIX.

Théoreme.

112. *Un segment parabolique* ABCI (Fig. 31), *étant donné avec le triangle* BAC *qui lui est inscrit, & qui a son sommet à l'origine du diametre* AF, *qui divise la base* AC *en deux également en* F ; *si par un point quelconque* D *de la base, on mene une droite* DI *paralléle au diametre* AF, *& terminée à la parabole en* I ; *je dis que les segments de la droite* DI *formés par le côté* AC *du triangle* BAC, *seront proportionels aux segments de l'ordonnée* FC, *ou ce qui est la même chose que l'on aura*, FC : FD :: DH : *DI*.

Démonstration.

Par le point *I*, où la ligne *DI* rencontre la parabole, soit menée la ligne *IK* paralléle à *BC* qui sera ordonnée au diametre *AF*, puisque *FC* est supposée ordonnée au même diametre, & qui coupera le côté *AC* en *L*. Par le point *H* soit pareillement menée la droite *GH* paralléle à la même *BC*, on aura $IK = GH = FD$ à cause des paralléles *AF*,

ID. Cela posé à cause des triangles semblables AKL, AFC

$FC:KL::AF:AK$ & *par la 14eme propo:* $AF:AK::FC^2:IK^2$.

Donc $FC:KL::FC^2:IK^2$ Donc $FC \times IK^2 = FC^2 \times KL$ & divisant par FC, $IK^2 = FC \times KL$ d'où l'on tire $FC:IK::IK:KL$ ou bien $FC:FD::IK:KL$.

Car $FD = IK$.

Donc *dividendo* $FC - FD : FC :: IK - KL : IK$ & en réduisant $DC : FC :: IL : IK$.

Et *alternando* $DC : IL :: FC : IK$ ou FD qui lui est égal. Mais à cause des triangles semblables CDH LIH, $DC : IL :: DH : IH$, donc on aura $FC : FD :: DH : IH$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

113. A cause du diametre AF, on a $BF = FC$ & à cause du parallélogramme $GODH$ on a $DH = FG$, donc puisque l'on a $FC : FD :: DH : IH$; on aura aussi $BF : GH :: FG : IH$ & alter. $BF : FG :: GH : IH$ d'où il suit que la ligne BGI est une ligne droite. *On verra l'usage de cette proposition & de son corollaire dans le Livre de la description des sections coniques.*

Fin de la parabole.

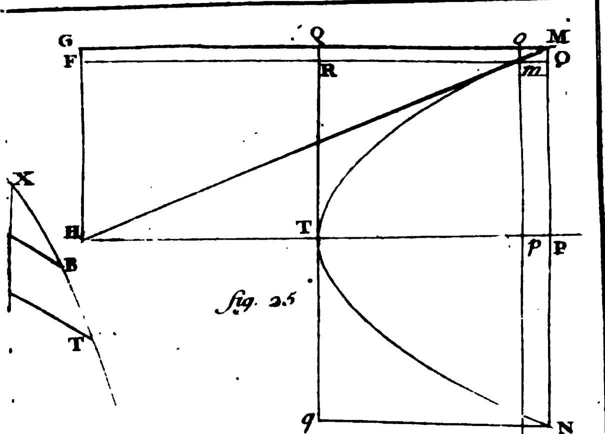


fig. 25

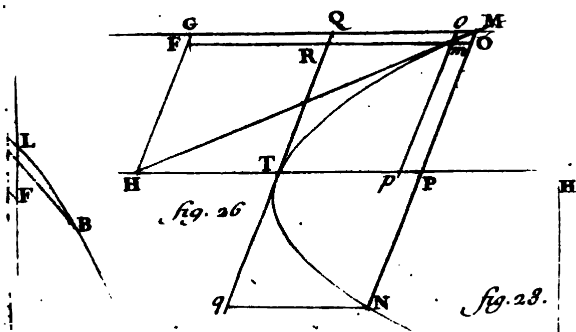


fig. 26

fig. 28.

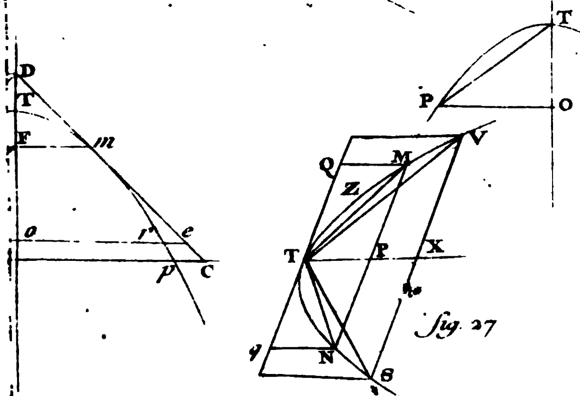


fig. 27

Drouis Scrip.



DE L'ELLIPSE,

LIVRE SECOND.

Des propriétés de l'Ellipse considerée sur un Plan.

Génération de cette Courbe.

114. *'IL y a sur un plan* (fig. 32.) *une ligne droite* IT *coupée en deux parties égales au point* C, *& deux autres points* F D *sur la même ligne également éloignés du point* C ; *je dis que l'on pourra trouver une infinité de points* P P, *soit au dessus soit au dessous de la ligne* IT, *tels que la somme des lignes* FP DP, *menées de chacun de ces points aux points* F D, *soit égale à la ligne entiere* IT.

DÉMONSTRATION.

Je divise la ligne *IT* en deux parties quelconques au point *G* : de l'une de ces parties *IG* comme rayon, & du point *F* comme cen-

tre, je décris deux arcs de cercle vers P, l'un au dessus & l'autre au dessous de la droite IT; de l'autre partie GT comme rayon & du centre D, je décris deux autres arcs de cercle qui coupent les deux premiers en deux points déterminés P P, qui sont évidemment tels que la somme des lignes FP PD menées de chacun de ces points aux points FD, est égale à la ligne donnée IT: Je divise encore IT en deux autres parties inégales en g, & faisant les mêmes opérations que pour le point G, il vient encore deux points p p, l'un au dessus, l'autre au dessous de IT, tels que $Fp + Dp = IT$: & comme on peut diviser IT d'une infinité de manieres différentes, ensorte que les deux parties IG GT ou Ig gT, ayent entr'elles tel rapport qu'on voudra, on pourra aussi trouver une infinité de points P tels que l'on ait toujours $FP + PD = IT$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

115. *Une même division peut servir à trouver quatre points de la courbe. Car si du point* D *comme centre & rayon* IG, *on décrit deux arcs de cercle vers* P *au dessus & au dessous de* IT *& que du point* F *comme centre, & demi-diametre* GT, *on décrive deux autres arcs de cercle qui coupent les deux premiers aux points déterminés* P P, *on aura deux nouveaux points* P P, *qui sont évidemment tels que* FP + PD = IT. *Il en est de même du point* g *& de toute autre division.*

On remarquera encore que les points D F *sont les limites des points de division* G g. *Car si le point de division tomboit au delà du point* D *par rapport au point* C, *comme en* d, *le cercle décrit du point* F *comme centre, avec le rayon* I d *couperoit la ligne* I T *au delà du point* T *& ne pourroit par conséquent être coupé ni touché par le cercle décrit du point* D *comme centre avec le rayon* d T.

Corollaire I.

116. Puisque la ligne *IT* est divisée en deux également en *C* & que les points *FD* sont également éloignés du point *C*, on aura $ID = FT$ & $IF = DT$; d'où il suit que la courbe qui passe par les points *P P*, passe aussi par les points *I T*. Car si le point *G* de division tombe au point *D*, le cercle décrit du rayon *ID* & du centre *F* coupera la ligne *IT* en *T*, & touchera le cercle décrit du centre *D* avec le rayon *DT* au même point *T*, ensorte que l'on aura toujours $FT + DT = IT$. On aura de même $ID + IF = IT$, donc ces points ont les mêmes propriétés que les points *P* & partant appartiennent à la courbe.

Corollaire II.

117. Puisque la ligne qui passe par les points *P P*, coupe la ligne *IT* aux points *I T*, & qu'elle a autant de points au dessus qu'au dessous de la droite *IT*, il suit qu'elle renferme un espace déterminé, & forme ce qu'on appelle une courbe rentrante.

COROLLAIRE III.

118. Il suit encore de cette construction qu'un ligne *POP*, menée d'un des points de la courbe perpendiculairement à *IT* & terminée à cette courbe, est coupée en deux également par la même droite *IT*; car cette ligne a deux points *F*, *D* également éloignés des extrémités *P P* de la droite *POP*, à cause des cercles décrits des rayons *FP DP* & des centres *FD*, dont la ligne *P O P* est une corde commune.

DÉFINITIONS.

I.

119. La ligne *PP IT* formée par les points *P* déterminés comme on vient de le dire est appellée *Ellipse*. On verra dans la suite pour quelle raison elle a été ainsi nommée.

II.

120. Le point *C* qui divise *IT* en deux également est appellé *Centre* de l'ellipse.

III.

121. La ligne droite *IT* est appellée *grand Axe*, ou premier diametre.

IV.

122. La ligne droite *NCM* (Fig. 34.) perpendiculaire à l'axe *IT*, & qui passant par le centre *C*, est terminée à l'ellipse de part & d'autre, est appellée *petit Axe*.

V.

123. Les points *FD* également éloignés du point *C*, sont nommés *Foyers de l'ellipse*.

VI.

124. Les lignes droites menées des points *P* de l'ellipse perpendiculairement à l'axe *IT* & terminées à cet axe, sont dites *Ordonnées* ou *Appliquées*. Ainsi *PO* est une ordonnée à l'axe *IT*.

VII.

125. Les parties de l'axe faites par la rencontre d'une ordonnée *PO*, comme *IO OT* sont appellées *Abscisses* ou *Coupées*. On compte quelquefois les abscisses sur l'axe, en partant du centre. Ainsi *CO* est une abscisse du demi axe *CT*, & *OT* est l'autre abscisse du même demi axe.

VIII.

126. Les lignes droites, comme *P Cp* (Fig. 34.) qui passent par le centre & se terminent à l'ellipse de part & d'autre, sont nommées *Diametres*, parce qu'elles divisent la surface de l'ellipse en deux parties égales comme on verra par la suite.

IX.

127. Une ligne qui ne peut rencontrer l'ellipse qu'en un seul point est appellée *Tangente* en ce point, ainsi la ligne *TH* perpendiculaire à l'extrémité de l'axe en *T*, est tangente en ce point. Car on démontrera ci-après qu'elle ne la peut rencontrer qu'en ce seul point.

LEMME.

128. *En tout triangle rectangle comme* FOP (*Fig.* 33.) *le produit de la ligne* PH, *somme de l'hypoténuse* FP *& d'un des côtés* FO, *par* MP *différence des mêmes côtés, est égal au quarré de l'autre côté* PO, *ou ce qui revient au même*

$$(FP+FO)\times(FP-FO)=PO^2.$$

DÉMONSTRATION.

Du point F, comme centre avec le rayon FO côté de l'angle droit FOP, soit décrit un demi cercle qui coupe l'hypoténuse en M & son prolongement en H. La ligne PO sera tangente en O à cause de l'angle droit FOP, & l'on aura évidemment à cause du cercle $PH=FP+FO$ & $MP=FP-FO$. Mais (*par la proposition* 36 *du* 3eme *Livre d'Euclide*), la tangente PO est moyenne proportionelle entre la sécante entiere PH & sa partie extérieure MP, donc $(FP+FO)\times(FP-FO)$, ou $MP\times PH=PO^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

129. *L'Ellipse étant formée* (Fig. 34). *comme on l'a expliqué ci-devant ; je dis que le quarré* PO^2 *d'une ordonnée* PO *au grand axe* IT, *est au rectangle de ses abscisses* IO×OT, *comme le rectangle* IF×FT, *des distances d'un des foyers aux extrémités de l'axe, est au quarré de* CT

moitié du grand axe IT, *c'est-à-dire que l'on aura cette proportion* $PO^2 : IO \times OT :: IF \times FT : CT^2$.

DÉMONSTRATION.

Soit prolongé FP jusqu'en A, ensorte que l'on ait $AF = IT$ ou $AP = PD$. Du point P, comme centre & avec le rayon PD, soit décrit un cercle qui coupera l'axe IT aux points DG, si le point O n'est pas confondu avec le point D, comme on le suppose ici, & la ligne AF en un point B. Soit enfin divisée cette même ligne AF en deux également au point R. On aura par cette construction $RP = \frac{FB}{2}$ & $CO = \frac{FG}{2}$. Car à cause du diametre AB on a $FB = AF - 2AP$, & à cause que le point R est le milieu de AF, on a $RP = \frac{AF}{2} - AP = \frac{FB}{2}$. De même $FG = 2CD - 2OD$ & $CO = CD - DO$ donc $CO = \frac{FG}{2}$. Cela posé par la propriété des sécantes extérieures au cercle, on a

$FA : FD :: FG : FB$ donc $\frac{FA}{2} : \frac{FD}{2} :: \frac{FG}{2} : \frac{FB}{2}$.

Ou bien $CT : CD :: CO : RP$.

Et *compo.* $CT : CT + CD :: CO : CO + RP$.

Donc *altern.* $CT : CO :: CT + CD : CO + RP$.

Faisant encore *componendo*.

$CT : CT + CO :: CT + CD : CT + CD + CO + RP$.

D'où l'on tire $CT : IO :: ID : FP + FO$, en mettant IC à la place de CT dans le premier conséquent, & dans le second antécédent, & FR au lieu de CT dans le second conséquent ainsi que FC au lieu de CD, puis faisant les réductions nécessaires.

De même puisque l'on a $CT : CD :: CO : RP$.
Donc *dividendo* $CT : CT - CD :: CO : CO - RP$.
Et *alternando* $CT : CO :: CT - CD : CO - RP$.
Et encore *dividendo*.

$$CT : CT - CO :: CT - CD : CT - CD - CO + RP$$

ce qui se réduit à $CT : OT :: DT : FP - FO$, en mettant FR à la place de CT, & FC à la place de CD son égale, dans le quatriéme terme de cette proportion. Mais nous venons de trouver ci-dessus $CT : IO :: ID : FP + FO$ & nous avons $CT : OT :: DT : FP - FO$. Donc en multipliant ces deux proportions par ordre

$$CT^2 : IO \times OT :: ID \times DT : (FP + FO) \times (FP - FO) = PO^2$$

par le lemme précédent Ce qu'il fal. démon.

Si le point O *se confond avec le point* D, *le cercle décrit du rayon* PD *touchera l'axe au même point* D, *& les lignes* FG, FO, FD *seront égales, ce qui ne peut restraindre la démonstration, mais seulement la simplifier. On trouveroit en ce cas pour la derniere proportion, en suivant le même procédé que ci-dessus,*

$$CT^2 : ID \times DT :: ID \times DT : (FP + 2CD) \times (FP - 2CD) = PD^2.$$

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

130. *Supposant toutes choses comme dans la proposition précédente; je dis que le rectangle* ID×DT *est égal au quarré de* CM, *moitié du petit axe* NCM. (Fig. 34.)

DÉMONSTRATION.

Puisque la proposition précédente est dé-

montrée généralement pour toutes les ordonnées à l'axe IT, en supposant que le demi axe CM soit une ordonnée au premier, on aura *par la même proposition*

$$CT^2 : IC \times CT :: ID \times DT : CM^2$$

mais $IC \times CT = CT^2$

Donc $ID \times DT = CM^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* On peut démontrer plus directement cette proposition, en menant des foyers à l'extrémité du petit axe les droites FM DM. Car puisque le point M est à l'ellipse, on a $FM + DM = IT$ *par la génération de cette courbe* ; mais à cause des triangles rectangles FCM DCM qui ont les côtés égaux FC CD & le côté CM commun, on a $FM = DM = CT$ & (*par la trente deuxième d'Euclide*) dans le triangle rectangle FCM on a

$$FM^2 \text{ ou } CT^2 = CM^2 + CF^2.$$

Donc

$$CM^2 = CT^2 - CF^2 = (CT + CF) \times (CT - CF)$$

ou enfin $ID \times DT$.

Corollaire.

131. Puisque l'on a $CM^2 = ID \times DT$, on aura aussi $ID : CM :: CM : DT$, c'est-à-dire que le demi petit axe est moyen proportionel entre les distances d'un des foyers aux extrémités du grand axe, d'où il suit que si l'on connoit le premier axe, avec la distance d'un des foyers à son origine, on pourra trou-

$PQ^2 : MQ \times QN :: CT^2 : CM^2 :: IT^2 : MN^2$.
Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

135. Si par un point p de l'ellipse, on mene une droite pq perpendiculaire au petit axe & qui lui sera par conséquent ordonnée, on démontrera comme dans cette proposition que
$$pq^2 : Mq \times qN :: IT^2 : MN^2.$$
Mais on a aussi $PQ^2 : MQ \times QN :: IT^2 : MN^2$. Donc $PQ^2 : MQ \times QN :: pq^2 : Mq \times qN$ c'est-à-dire que les quarrés des ordonnées au petit axe, sont entr'eux comme les produits des abscisses correspondantes à ces ordonnées.

* DÉFINITION.

136. Une ligne troisiéme proportionelle aux deux axes, (Fig. 35.) est appellée *parametre* de celui qui occupe le premier terme de la proportion continue. Par exemple si l'on fait $IT : MN :: MN : TR$, cette ligne sera le *parametre* de l'axe IT & de même, si l'on fait $MN : IT :: IT : MS$. La ligne MS sera le *parametre* du second axe MN.

COROLLAIRE.

137. Il suit de cette définition que le rectangle d'un axe par son parametre, est égal au quarré du second. Car puisque $IT : MN :: MN : TR$. Donc $IT \times TR = MN^2$.

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

138. *Soit une ellipse* MTN, *dont* IT MN

(*Fig.* 35.) *sont les axes* F, D, *les foyers* PO, *une ordonnée quelconque à l'axe* IT, *dont le parametre est supposé égal à la ligne* TR *élevée perpendiculairement à son origine, si l'on joint les points* I R *par la droite* IR *& qu'ayant prolongé* PO *jusqu'à ce qu'elle la rencontre en* G, *on mene par ce point la droite* GL *paralléle à* IT. *Je dis que l'on aura* $PO^2 = OT \times TL$, *ou, ce qui est la même chose, que le quarré de l'ordonnée est égal au produit de son abscisse* OT *multipliée par le parametre diminué de la quantité* RL, *quatriéme proportionelle à l'axe, au parametre & à l'abscisse* OT.

DÉMONSTRATION.

Par la troisiéme proposition (num. 32.)

$PO^2 : IO \times OT :: MN^2 : IT^2$

donc $IO \times OT : PO^2 :: IT^2 : MN^2$ & à cause du parametre TR, $IT^2 : MN^2 :: IT : TR$ & à cause des triangles semb. RTI, GOI;

$IT : TR :: IO : OG$

$IO : OG :: IO \times OT : OG \times OT$.

Donc $IO \times OT : PO^2 :: IO \times OT : OG \times OT$.

Mais $IO \times OT = IO \times OT$, donc aussi

$PO^2 = OG \times OT$.

Et à cause du parallélogramme $OGLT$, $OG = TL$, donc $PO^2 = OT \times TL$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

139. Il est évident à cause des triangles semblables RLG, RTI & des paralélles OT,

GL, que $IT : TR :: OT : RL$. Donc $OT \times TR = IT \times RL$, ou, ce qui est la même chose le rectangle OR est égal au rectangle VL; & ôtant de ces rectangles égaux le rectangle commun $GLRK$. On aura le rectangle GT égal au rectangle GV, mais on vient de démontrer que ce rectangle GT est égal au quarré de l'ordonnée PO donc on aura aussi $PO^2 = VK \times GK$.

Corollaire II.

140. Il suit évidemment de cette proposition que le quarré d'une ordonnée PO est toujours moindre que le rectangle de son abscisse par le parametre, soit que l'on prenne l'abscisse OT, soit que l'on prenne IO, & la différence dans l'un & l'autre cas sera toujours un rectangle semblable à celui de l'axe par son parametre, & c'est de cette propriété que l'ellipse prend son nom, qui signifie proprement, *defectus*. Cette différence dans le premier cas est égal au rectangle GR & au rectangle IG, dans le second.

PROPOSITION VI.

Théorême.

141. *Si par le foyer* F, (fig. 35.) *on mene une double ordonnée à l'axe* EFe; *je dis que cette ligne sera égale au parametre de l'axe.*

Demonstration.

Par la premiere & seconde proposition, on a

$EF^2 : IF \times FT :: CM^2 : CT^2$. Mais par la 3eme prop. $IF \times FT$ ou $ID \times DT = CM^2$ donc $EF^2 : CM^2 :: CM^2 : CT^2$ & tirant les racines

$$EF : CM :: CM : CT \text{ \& } invert$$

$$CT : CM :: CM : EF$$

doublant chaque terme de la proportion.

$$2CT : 2CM :: 2CM : 2EF.$$

ou bien $IT : MN :: MN : Ee$, d'où il suit évidemment que cette ligne est égale au parametre de l'axe IT *par sa définition* (*num.* 136.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

142. *Cette proposition n'est vraye dans l'éllipse que par rapport à l'axe, il n'y a que dans la parabole quelle est généralement vraye pour un diametre quelconque, comme l'on peut aisément s'en convaincre par algébre, d'ailleurs il est aisé de reconnoître cette vérité si l'on fait attention que le parametre du second axe* MN *étant plus grand que le grand axe* IT, *il ne peut y avoir une double ordonnée à ce petit axe qui soit égale à son parametre.*

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

143. *Tout diametre comme* PCR (Fig. 36.) *est coupé en deux parties égales* PC, RC, *par le centre* C.

DÉMONSTRATION.

Supposons d'abord que CP n'est pas

égale à *CR*. en ce cas elle ne peut être que plus petite ou plus grande que *CR*. Voyons où cette suppoſition nous conduira.

Puiſque *CP* eſt plus grand que *CR* (*hyp.*) je puis prendre ſur cette ligne une partie $Cp=CR$. de ce point *p* je mene aux foyers les droites *pD pF* : cela poſé il eſt évident que les triangles *CDp CFR* ſeront égaux & ſemblables, puiſqu'ils ont un angle égal *C*, compris entre côtés égaux, car $CD=CF$ (*num.* 114) & (*hip.*) $Cp=CR$. de même les triangles *CDR*; *CFp* ſeront égaux en tout puiſqu'ils ont auſſi l'angle *C* égal compris entre côtés égaux *CD CF*, *Cp CR*, d'où il ſuit que $pD=RF$ & que $pF=RD$. Mais puiſque le point *R* eſt un des points de l'ellipſe on a *par la génération de cette courbe* $RF+RD=IT$ donc auſſi $pD+pF=IT$. donc $pD+pF=PD+PF$. ce qui eſt abſurde, car la ſomme des lignes *pD pF*, eſt évidemment plus petite que celle des lignes *PD PF*. On ne peut donc pas ſuppoſer ſans abſurdité que *CP* ſoit plus grande que *CR*; on démontrera de la même maniere que l'on ne peut pas ſuppoſer cette ligne plus petite que *CR* ſans un pareil inconvénient, reſte donc quelle lui ſoit égale, puiſqu'elle ne peut être ni plus petite ni plus grande ſans abſurdité. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

144* Il ſuit de cette propoſition que le grand

grand axe IT est le plus grand de tous les diametres. Car à cause des triangles DCP, FCR égaux & semblables comme on l'a démontré dans cette proposition, $PD = FR$ mais $FP + PD = IT$ donc aussi $FP + FR = IT$ mais $FP + FR > PR$ donc $IT > PR$. Ce qui se démontrera de même pour tout autre diametre.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

145. *Supposant toutes choses comme dans la proposition précédente, & l'ordonnée* PO *à l'axe* IT, (Fig. 36.) *je dis que le petit axe* MN *est le plus petit diametre possible.*

DÉMONSTRATION.

A cause du triangle rectangle COP, on a (*par la 32 d'Euclide*) $CP^2 = CO^2 + PO^2$:
Mais (*num.* 129.) on a
$CT^2 : IO \times OT :: ID \times DT : PO^2$ & *par le lemme fonda.* $IO \times OT = CT^2 - CO^2$ & $ID \times DT = CT^2 - CD^2$.
Donc $CT^2 : CT^2 - CO^2 :: CT^2 - CD^2 : PO^2$.
Donc $PO^2 = (CT^2 - CO^2) \times \left(\frac{CT^2 - CD^2}{CT^2}\right)$ & en faisant les multiplications indiquées, il vient

$$PO^2 = \frac{CT^2 \times CT^2 - CO^2 \times CT^2 - CT^2 \times CD^2 + CO \times CD^2}{CT^2}.$$

Donc

$$CP^2 = \frac{CT^2 \times CT^2 - CO^2 \times CT^2 - CT^2 \times CD^2 + CO^2 \times CD^2 + CO^2 \times CT^2}{CT^2}$$

en substituant l'expression de PO^2 dans l'égalité $CP^2 = CO^2 + PO^2$, & réduisant CO^2 au même dénominateur. D'où l'on tire en faisant les réductions nécessaires & divisant par CT^2

autant qu'il est possible

$$CP^2 = CT^2 - CD^2 + \frac{CO^2 \times CD^2}{CT^2}$$

Mais (*num.* 130.) $CT^2 - CD^2$ ou $ID \times DT = CM^2$ Donc $CP^2 = CM^2 + \frac{CO^2 \times CD^2}{CT^2}$. d'où il suit évidemment qu'un demi-diametre CP sera toujours plus grand que le demi-petit axe CM tant que l'abscisse CO sera de quelque valeur & partant le second axe MN est le plus petit de tous les diametres. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

146. Donc les deux axes sont les limites de l'augmentation & de la diminution des diametres, puisque le premier est le plus grand de tous, *par le corollaire de la 7ème* & que le second est le plus petit de tous par la présente.

COROLLAIRE II.

146. Donc si l'on décrit un cercle du point C comme centre avec le rayon CM, ce cercle sera inscrit à l'ellipse & la touchera aux seuls points MN, puisque tous les diametres CP différents de CM seront plus grands : & que partant les points P seront hors du cercle. *

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

148. *Si par le point* I (Fig. 36.) *origine de l'axe on éleve une perpendiculaire* IS ; *je dis qu'elle ne rencontre l'ellipse qu'au seul point* I, *ou, ce qui*

est la même chose qu'elle est tangente en ce point.

DÉMONSTRATION.

Si la ligne droite IS n'est pas tangente à l'ellipse au point I, elle la rencontrera encore en quelqu'autre point S. De ce point aux foyers F & D soient menées les lignes FS DS, puisque ce point est supposé appartenir à l'ellipse, on aura *par la génération de cette courbe* $FS+DS=IT$. Mais DS étant l'hypothénuse d'un triangle rectangle IDS, est plus grande que la ligne ID & pareillement FS est plus grande que IF ou DT, par la même raison. Donc $FS+DS>ID+DT=IT$. D'où il suit évidemment que le point S ne peut appartenir à l'ellipse. On démontrera la même chose de tout autre point ; donc la ligne IS perpendiculaire à l'extrémité de l'axe IT est tangente à la courbe en ce seul point. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

149. *Si par un point* P (Fig. 37.) *de l'ellipse on mene aux foyers* F D, *les droites* FP DP, *& qu'ayant pris sur le prolongement de* FP *la ligne* AP=PD, *par le point* A *ainsi déterminé ; on mene la droite* AD, *& qu'enfin par le milieu* E *de cette ligne, & le point* P, *on tire la droite* PE, *je dis que cette ligne sera tangente au seul point* P.

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer que la droite PE est tan-

gente au seul point P, il suffira de faire voir que tout point comme p différent du point P, ne peut être à l'ellipse. De ce point p pris à discrétion sur la ligne PE soient menées aux points A D F, les droites pA, pD, pF. Puisque l'on a (*par construction*), $AP=PD$ & $DE=AE$, la droite PE est perpendiculaire sur le milieu de AD, & passe par tous les points également éloignés des extrémités A D de la ligne AD, donc $pA=pD$: mais $pA+pF>FA$. Donc aussi $pF+pD>FA$ qui est égale à IT *par construction.* Donc le point p ne peut être à l'ellipse. Donc la droite PE est tangente au seul point P, *comme on l'a proposé.*

PROPOSITION XI.

Théoreme.

150. *Par un point* P *donné sur une ellipse* IPT *l'on ne peut mener qu'une tangente* PE. (Fig. 38.)

Démonstration.

Supposons d'abord que du point P dans l'angle DPE, on puisse mener une tangente Ph différente de la tangente PE. Du foyer D j'abaisse sur cette ligne la perpendiculaire Dga, du point F comme centre avec le rayon AF ou IT, je décris un arc de cercle qui coupe la droite Dga au point a, je mene la droite Fa qui rencontre l'ellipse au point p, & la droite aP du point a au point P. Enfin par le milieu

e de la droite aD & le point p; je tire la droite ep qui sera évidemment tangente au point p, par la proposition précédente. Cette construction supposée & bien conçue, il est aisé de démontrer que la ligne Ph ne peut être tangente au point P. Car puisque la ligne pe est tangente en p, elle est perpendiculaire à Da, donc Pgh lui est paralléle, puisque cette ligne est *par construction*, perpendiculaire à la même Da. Donc elle sera partout également éloignée de cette tangente de la distance eg. Reste à démontrer que cette distance est toute entiere du côté de l'axe IT, ou, ce qui est la même chose, entre la tangente pe & le même axe. A cause du triangle FPa, on a $FP+Pa>Fa$. Mais $Fa=FA$ donc $FP+Pa>FA$ & ôtant de chaque membre la quantité commune FP; on aura $Pa>PA$; donc $Pa>PD$ puisque $PA=PD$, c'est-à-dire que le triangle DPa n'est pas isocéle; donc la perpendiculaire abaissée de l'angle P sur la base aD, la divise en deux segments inégaux, & le plus grand segment ag répond au plus grand côté aP & le plus petit Dg répond au plus petit côté PD. Donc la distance eg se trouve du côté de l'ellipse par rapport à la tangente pe, & partant la droite Ph n'est pas tangente en P comme on l'avoit supposé, puisqu'elle coupe l'ellipse. Donc par le point P l'on ne peut mener qu'une seule tangente PE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

On a cru devoir tourner cette démonstration ainsi que toutes les autres sur les tangentes un peu différemment de ce qu'elles sont dans M. dela Hire, *afin de leur donner la derniere certitude, & de ne rien laisser à désirer sur cet article.*

On va voir dans les deux problêmes suivants, l'usage que l'on fait de ces propositions pour mener des tangentes à l'ellipse, lorsque l'on en connoît l'axe & les foyers.

PROPOSITION XII.

PROBLÊME.

*151. *Une ellipse* IPT, *son axe* IT, *les foyers* F D, *& un point* P *sur cette courbe étant donnés, mener une tangente à ce point.* (Fig. 37.)

SOLUTION.

Du point *P* donné, je mene aux foyers *F D* les droites *PF PD*: sur le prolongement de la ligne *AP*, je prens une partie *AP*=*PD*. Ayant joint les points *A D*, par la ligne *AD*, par le point *E* milieu de cette ligne & le point *P* donné, je mene la ligne *PE* qui sera tangente en *P* puisqu'il n'y a sur cette ligne que le seul point *P* qui puisse appartenir à l'ellipse comme il est suffisamment démontré par les propositions précédentes.

PROPOSITION XIII.

PROBLÊME II.

152. *Une ellipse* IPT *son axe* IT *les foyers*

F D, *& un point* G (Fig. 37.) *sur le même plan que la courbe étant donné, mener une tangente qui passe par ce point.*

SOLUTION.

Du foyer *D* au point *G* soit menée la ligne *GD*. Du point *G* comme centre avec cette même ligne *GD* comme rayon, soit décrit un arc de cercle vers *A*. Ensuite du point *F* comme centre avec le rayon *IT* soit décrit un autre arc de cercle qui coupe le premier au point fixe *A*. Soient de plus joints les points *A* & *D* par la ligne *AD*: enfin par le point *E* milieu de cette ligne & le point *G* donné, soit tirée la ligne droite *GPE* qui sera tangente au point *P*, où la ligne *AF* coupe l'ellipse.

DÉMONSTRATION.

A cause du cercle dont le point *G* est le centre, on a $GA = GD$, de plus on a divisé la droite *AD* en deux également en *E*, donc la ligne *GPE* est perpendiculaire sur le milieu de *AD*. Donc elle passe par tous les points également éloignés de ses extrémités *A. D*, donc elle passe aussi par le point *P* où la ligne *AF* coupe l'ellipse; puisque ce point est tel que l'on a $PA = PD$. Enfin il est évident que tout autre point comme *p* différent du point *P* n'est point à l'ellipse, car ayant mené les droites *pA*, *pD*, *pF* aux points *A*, *D*, *F*, à cause du triangle *FpA*, on a $Fp + pA > FA$. Donc aussi $Fp + pD > FA$

qui est égal à IT. D'où il suit que la ligne GE est tangente au seul point P, d'ailleurs elle passe par le point donné G, *par construction*, donc elle remplit toutes les conditions du problême.

REMARQUE.

On voit aisément qu'en suivant la même construction, de l'autre côté du point G, *on trouvera une autre tangente* GRh, *dont on déterminera le point de contingence* R, *comme on a fait le point* P, *& tant que le point* G *ne sera pas sur l'ellipse, on trouvera toujours deux tangentes qui passeront par ce point. Si le point* G *étoit au-dedans de l'ellipse, le cercle décrit du rayon* GD *ne pourroit couper le cercle décrit du rayon* IT. *Ce qui doit arriver nécessairement, puisque dans ce cas la ligne qui passeroit par ce point, ne peut être tangente. En un mot cette solution est générale & l'on pourra toujours par son moyen avec la connoissance des foyers résoudre tous les problêmes où il ne s'agira que de mener des tangentes à l'ellipse.* *

PROPOSITION XIV.

THÉOREME.

153. *Supposant les mêmes choses que dans les propositions précédentes; je dis que les angles* FPp DPE (Fig. 37.) *formés du même côté de la tangente avec cette même tangente, par les lignes* FP DP *menées du point de contingence* P *aux foyers* D F, *sont égaux entr'eux.*

DÉMONSTRATION.

Puisque l'angle *DPA* du triangle isocéle *DPA* est coupé en deux également par la ligne *PE* menée du point *P* perpendiculairement à la base *AD*, on aura l'angle *DPE*, égal à l'angle *APE*, mais $APE = FPp$ qui lui est opposé au sommet, donc $DPE = FPp$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE. I.

154. Si l'on ajoûte à ces angles égaux *FPp* *DPE*, l'angle commun *FPD*, on aura évidemment l'angle *FPE* égal à l'angle *DPp*.

COROLLAIRE II.

155. * Il suit de cette proposition que si à l'un des foyers comme *F*, on place un point lumineux dont les rayons puissent s'étendre de toutes parts à la circonférence de l'ellipse, que l'on suppose capable de refléchir les rayons, ils y seront effectivement refléchis de maniere que la ligne de refléxion passera par l'autre foyer *D*; & réciproquement les rayons partis du foyer *D* étant refléchis à la rencontre de l'ellipse passeront par l'autre foyer *F*. Car on peut toujours imaginer qu'un rayon quelconque, *FD*, par exemple, va choquer l'ellipse au point *P*, comme il choqueroit le plan représenté par la tangente *PE* en ce point, & partant il doit se refléchir au foyer *D* suivant les loix des corps à ressort.

POPOSITION XV.

THÉOREME.

* 156. *Supposant toujours la même chose que dans la proposition précédente, si l'on divise l'angle* DPF *en deux également par la ligne* PR, *je dis que cette ligne sera perpendiculaire à la tangente en* P, *& que l'on aura* FR:RD::FP:PD. (Fig. 39).

DÉMONSTRATION.

1° Puisque l'angle DPF a été divisé en deux également par la ligne PR, on a l'angle $DPR = RPF$. Mais $RPF = NPA$ qui lui est opposé au sommet. Donc $DPR = NPA$ & ajoûtant à ces angles égaux les angles APE, DPE qui sont égaux à cause du triangle isocéle DPA, on aura l'égalité.
$EPA + NPA$ ou $EPN = DPE + DPR$ ou EPR, d'où il suit que la ligne PR est perpendiculaire à la tangente PE, puisque cette tangente fait avec elle deux angles égaux de suite NPE, EPR. *Ce qu'il falloit 1° démontrer.*

2° Puisque la ligne PR & la ligne ED sont chacunes perpendiculaires à la tangente EP, elles sont paralléles entr'elles, donc les triangles FPR, FAD sont semblables. Donc $FR : RD :: FP : PA = PD$. *Ce qu'il falloit 2° démontrer.*

COROLLAIRE I.

157. Puisque l'on a $FR : RD :: FP : PD$. Donc *componendo* $FR + RD : FR :: FP + PD : FP$.

ou en réduisant $FD:FR::IT:FP$. On voit par là comment il faudroit s'y prendre pour mener une perpendiculaire à l'ellipse d'un point *R* donné sur l'axe. Il n'y auroit qu'à faire cette proportion $FD:FR::IT:FP$; du point *F* comme centre, avec un rayon égal à cette quatriéme proportionelle *FP*, décrire une partie de cercle qui coupe l'ellipse en *P*, & l'on auroit le point demandé, où la ligne *RP* sera perpendiculaire à la tangente *PE*, & par conséquent à la courbe.

Car puisque l'on a fait $FD:FR::IT:FP$. Donc *dividendo* $FD-FR:FR::IT-FP:FP$, & *réduisant* $RD:FR::PD:FP$. Donc l'angle *FPD* est divisé en deux également puisque les segments de la base du triangle *FPD* sont proportionels aux côtés *FD DP*.

COROLLAIRE II.

158. Donc les perpendiculaires à l'ellipse seront toutes renfermées dans la partie F*D* de l'axe, puisque si près que l'on puisse imaginer le point *P* du point *T*, la ligne *PR* perpendiculaire à la tangente sera toujours comprise dans l'angle *FPD* qu'elle divise en deux également. D'où il suit que d'un point G pris sur l'axe entre *D* & *T*, aucune ligne différente de cet axe ne peut être perpendiculaire à la courbe.

REMARQUE.

Si le point R *étoit placé sur l'axe, de maniere que le cercle décrit du centre* F *avec la ligne* FP *quatriéme proportionelle aux droites* FD FR IT ;

ne pût pas couper l'ellipse en quelque points P, on concluroit que le problême seroit impossible. On verra dans la suite la limite précise des points R qui donnent la solution complette du problême.

PROPOSITION XVI.

Théorème.

159. *Si par un point* P *de l'ellipse on mene une droite* PQ, (Fig. 39.) *parallèle à l'axe, sur laquelle on prenne une partie* P Q = P F; *& que du point* Q *ainsi déterminé, & du point* F *on mene à la droite* P R *prolongée autant qu'il sera nécessaire, les droites perpendiculaires* N Q F M, *je dis que l'on aura* N Q : F M :: I T : F D, *ou, ce qui est la même chose, que ces perpendiculaires seront toujours entr'elles, dans le rapport constant de l'axe à la distance des foyers.*

Démonstration.

Les triangles rectangles *PQN*, *RPO* sont évidemment semblables, car à cause des paralléles *PQ FD* qui sont coupées par la droite *MN*, on a l'angle *QPN*=*QRP*. Donc on aura

QN:*PQ*::*PO*:*RP*, & à cause des triangles rectangles semblables *RPO*, *RFM*,

PO:*RP*::*FM*:*RF*.

Donc *QN*:*PQ*::*FM*:*RF*, alternant & mettant *FP* à la place de *PQ* son égale, on a *QN*:*FM*::*FP*:*FR* & à cause des triangles semb. *FPR*, *FAD*, *FP*:*FR*::*FA*:*FD*.

Donc *QN*:*FM*::*FA* ou *IT*:*FD*, *Ce qu'il falloit demontrer.*

REMARQUE.

160. On sçait par expérience qu'un rayon de lumiere (Fig. 40.) venant à tomber obliquement d'un milieu plus rare dans un milieu plus dense qu'il peut pénétrer, comme de l'air sur la surface polie d'un morceau de glace, au lieu de suivre sa premiere direction *Pr* en le traversant, s'en écarte pour suivre une ligne droite *PF* dans le même plan que la droite *PQ*, qui s'approche de la droite *MN* élevée perpendiculairement au point *P* où il a rencontré le milieu.

On sçait de plus encore par expérience que la droite *QN* sinus de l'angle d'incidence *QPN*, est toujours dans un rapport constant avec la droite *FM* sinus de l'angle de réfraction *FPM* pour même milieu en supposant le sinus total $PQ = PF$.

Si donc on décrit une ellipse telle, que les droites *IT FD*, ayent entr'elles le même rapport constant, qu'ont entr'eux les sinus des angles d'incidence & de réfraction, ce qu'on aura reconnu par expérience. Si du foyer *F*, comme centre avec un rayon quelconque *FO*, on décrit un arc de cercle qui coupe la courbe dans un point *S*, pour former ensuite un solide de verre ou de glace, égal & semblable à celui qui résulteroit de la révolution de la figure *OgSPT* autour de l'axe *IT* ; on aura un corps dont voici la propriété.

Tout rayon comme *PQ* qui venant parallélement à l'axe *IT* rencontrera la surface con-

vexe de ce corps, au lieu de suivre sa premiere direction *Pr* s'en écartera pour s'approcher de la droite *PR*, de maniere que sa nouvelle direction passera par le foyer *F*. Car le rayon rencontre la surface convexe de ce corps de la même maniere qu'il rencontreroit un plan représenté par la tangente *PE*. L'angle *NPQ* est donc l'angle d'incidence, & l'angle *FPM* est celui de réfraction, puisque les droites *NQ FM*, qui en sont les sinus, a cause de $PQ = PF$, sont entr'elles comme *IT* à *FD* que l'on a fait (*par construc.*) égal au rapport des sinus des angles d'incidence & de réfraction d'un rayon qui passe de l'air dans le verre. Enfin à cause du cercle *OgS*, le rayon *PgF* est perpendiculaire à la surface convexe de la partie sphérique décrite par l'arc *OS*, puisque le rayon tend au centre *F* de la même sphére, donc il sortira du verre sans souffrir aucune réfraction, parce qu'un corps qui pénetre un milieu par une ligne perpendiculaire à sa surface, ne peut s'éloigner de cette même perpendiculaire. Donc le rayon *SP* ayant une fois pris la direction *PF* ne pourra s'en écarter, & partant arrivera au point *F*. On démontrera la même chose de tout autre rayon différent de *PQ*, pourvû qu'il vienne suivant une ligne paralléle à l'axe. Si l'on veut avoir un plus grand détail des propriétés de ce corps par rapport à la dioptrique, on peut voir l'usage que M. Descartes fait de cette propriété dans son Livre de Dioptrique, & l'excellent

Traité des Courbes de M. Dela Chapelle. *

PROPOSITION XVII.

Théoreme.

161 *Supposant toutes choses comme dans la* 14eme *proposition* (fig. 41). *Si l'on prolonge la tangente* PE, *jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe* IT *de l'ellipse en un point* H, *je dis que l'on aura cette proportion continûe* CO:CT::CT:CH, *c'est-à-dire que toute ligne comprise entre le centre de l'ellipse & la rencontre de l'axe par une tangente* PH *est troisiéme proportionelle à l'abscisse correspondante à l'ordonnée* PO, *& au demi axe.*

Démonstration.

Par le foyer F, le centre C & le point H où la tangente PH rencontre l'axe IT, soient menées les droites FL, CR, HK paralléles à la ligne AD. Il est visible que la droite FA sera divisée en deux également au point R, puisque la ligne FD l'est en C. Cela posé, les triangles semblables FPL APE, FLH DEH, FKH FAD, nous donnent

$FP:AP::FL:AE=DE.$

$FL:DE::FH:DH.$

$FH:DH::FK:AK.$

Donc $FP:AP::FK:AK$. Et *dividendo*

$FP-AP:AP::FK-AK:AK.$

Mais à cause du cercle ADG $AP=PB$, donc $FP-AP=FP-PB=FB=2RP$, comme il a été démontré au commencement de la 1ere proposition (*num.* 129). De même $FK-AK=AF=IT$. Donc en substituant

ces valeurs dans la derniere proportion on aura $2RP:AP::IT:AK$, & prenant la moitié des antécédents $RP:AP::CT:AK$ & *componendo* $RP:RP+AP::CT:CT+AK$.
Mais $RP+AP=RA=CT$
& $CT+AK=AR+AK=KR$
puisque $CT=AR$. Donc $RP:CT::CT:KR$;
Donc $CT^2=RP\times KR$.

Présentement à cause du cercle AGD & des sécantes intérieures FA FD, on a, comme dans la 1[ere] prop. $FD:FA::FB:FG$.
Mais $CD=\frac{FD}{2}$, $AR=\frac{FA}{2}$, & l'on démontrera comme au *numero* 126 que $RP=\frac{FB}{2}$ & que $CO=\frac{FG}{2}$; donc $CD:AR::RP:CO$, & à cause des paralléles CR KH,

$$CD:AR::CH:KR.$$

Donc puisque les deux 1[eres] raisons sont égales, $RP:CO::CH:KR$. Donc $CO\times CH=RP\times KR$. & nous venons de trouver ci-dessus

$$CT^2=RP\times KR.$$

Donc $CT^2=CO\times CH$, d'où l'on tire tout de suite $CO:CT::CT:CH$; *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

162. Il suit de cette proposition que l'on aura aussi $IO:OT::IH:HT$; car puisque $CO:CT::CT:CH$; on aura *componendo* $CO:CO+CT::CT:CT+CH$, & *dividendo*

$$CO:CT-CO::CT:CH-CT.$$

Donc puisque les deux proportions ont les mêmes antécédents, les conséquents seront aussi.

aussi en proportion & donneront
$CT+CO:CT-CO::CH+CT:CH-CT$.
Ou *réduisant & alternant* $IO:IH::OT:HT$.
Ce qui montre que la ligne IH est coupée en proportion harmonique aux points O T.

* *Il y a proportion harmonique entre trois grandeurs, lorsque la plus petite est à la plus grande; comme l'excès de la moyenne sur la plus petite, est à l'excès de la plus grande sur la moyenne : par exemple, ces trois nombres, 3 4 6, sont en proportion harmonique, car on a* $3:6::4-3:6-4::1:2$. *Selon cette définition, il est aisé de voir que les trois grandeurs* IO IT IH *sont en proportion harmonique, puisque l'on a par le présent corollaire* $IO:IH::OT:HT$. *Mais* $OT=IT-IO$, *&* $HT=IH-IT$. *Donc on aura* $IO:IH::IT-IO:IH-IT$, *ce qui suffit pour en conclure que ces trois lignes sont en proportion harmonique.*

COROLLAIRE II.

163. Puisque l'on a $CO:CT::CT:CH$, on aura $CH=\frac{CT^2}{CO}$; donc OH ou $CH-CO$, $=\frac{CT^2}{CO}-CO=\frac{CT^2-CO^2}{CO}$, en réduisant CO à la même dénomination. D'où l'on tire $CO:CO+CT::CT-CO:OH$. Puisque $CT^2-CO^2=(CT+CO)\times(CT-CO)$.

DÉFINITION.

164. La ligne CH comprise entre le centre C, & la rencontre de l'axe IT, par une tangente PH est appellée *sou-tangente*, & l'on se sert des propriétés de cette ligne, pour mener

une tangente à l'ellipse par un point donné, soit qu'il se trouve sur la courbe, soit qu'on le donne sur le prolongement de l'axe, comme on le va voir dans les deux problêmes suivants, que l'on ne met ici, que pour montrer l'usage de cette proposition.

PROPOSITION XVIII.

PROBLÊME III.

165. *Un point* P *étant donné sur l'ellipse* (Fig. 42), *mener une tangente* PH *à ce point.*

SOLUTION.

Du point *P* donné, soit abaissée l'ordonnée *PO* à l'axe *IT*: puis faites cette proportion *CO*:*CT*::*CT*:*CH*. Par le point *P* & le point *H* ainsi déterminé, menez la droite *PH* qui sera tangente en *P*; comme il est évident *par la proposition précédente.*

PROPOSITION XIX.

PROBLÊME IV.

166. *Un point* H *étant donné sur le prolongement de l'axe* IT, *mener par ce point une droite* HP *qui aille toucher l'ellipse dans un point* P.

SOLUTION.

Faites la proportion continue *CH*:*CT*::*CT*:*CO*, au point *O* ainsi déterminé élevez l'ordonnée *PO* à l'axe *IT*, & enfin joignez le point *P* de l'ellipse & le point donné *H*, par la ligne *PH*, qui sera la tangente demandée,

comme il est suffisament démontré *par la dix-septiéme.*

PROPOSITION XX.

THÉOREME.

167. *Supposant encore toutes choses comme dans les propositions précédentes* (Fig. 42), *si l'on mene du point* P *l'ordonnée* PQ *au petit axe* MN, *& si l'on prolonge la tangente* PH *jusqu'à ce qu'elle rencontre le même petit axe en* K, *je dis que l'on aura la proportion continue*

CQ : CM :: CM : CK.

DÉMONSTRATION.

A cause du parallélogramme $CQPO$, on a $CO=PQ$; & comme la ligne MN est coupée en deux parties égales en C, & en deux parties inégales en Q on aura, *par le lemme fondamental*, $MQ\times QN=CM^2-CQ^2$. Cela posé puisque, *par la* 17eme *proposition*, $CO:CT::CT:CH$ on aura $CO:CH::CQ^2:CT^2$ & *par la* 4eme PQ^2 ou $CO^2:CT^2::CM^2-CQ^2:CM^2$ donc $CO:CH::CM^2-CQ^2:CM^2$, & à cause des triangles semblables CKH QKP; PQ ou $CO:CH::QK:CK$.

Donc $QK:CK::CM^2-CQ^2:CM^2$.

Donc *dividendo*

$CK-QK:CK::CM^2-CM^2+CQ^2:CM^2$.

Et *réduisant* $CQ:CK::CQ^2:CM^2$.

Donc $CQ\times CM^2=CK\times CQ^2$, & divisant chaque membre par CQ, $CM^2=CK\times CQ$, d'où l'on tire $CQ:CM::CM:CK$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

168. Puisque $CQ : CM :: CM : CK$. Donc on aura *compon.* $CQ : CQ + CM :: CM : CM + CK$, & *dividendo.* $CQ : CM - CQ :: CM : CK - CM$. Donc puisque les antécédents de ces proportions sont les mêmes, les conséquents seront aussi en proportion, ce qui donne
$CQ + CM : CM - CQ :: CK + CM : CK - CM$.
Et *réduisant* $NQ : MQ :: NK : KM$.
Et *alternant* $NQ : NK :: MQ : KM$.
D'où il suit que la ligne NK est divisée aussi en proportion harmonique aux points Q M, puisque la plus petite ligne NQ, est à la plus grande NK, comme l'excès MQ de la moyenne sur la plus petite, est à l'excès KM de la plus grande sur la moyene.

Cette proposition sert aux mêmes usages que la dix-septiéme.

DÉFINITION.

* 169. Si d'un point P de l'ellipse (Fig. 42), on mene une ordonnée PO à l'axe IT: & par le même point, une perpendiculaire PR à la tangente PH, terminée à l'axe en R, la partie OR du même axe comprise entre l'ordonnée PO & le point R, est appellée *sou-perpendiculaire* ou *sou-normale*.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

170. *Supposant les mêmes choses* (Fig. 42).

que dans la définition précédente, je dis que l'abscisse CO *& la sou-normale* OR, *sont toujours entr'elles dans un rapport constant qui est celui de* CT^2 *à* CM^2, *ou, ce qui revient au même, que l'on aura toujours cette proportion pour une abscisse quelconque* CO *& la sou-normale correspondante* OR;

$$CO:OR::CT^2:CM^2$$

DÉMONSTRATION.

Puisque le triangle rectangle RPH, est divisé par l'ordonnée PO perpendiculaire à l'axe, en deux triangles rectangles ROP POH semblables au premier, on a $OR:PO::PO:OH$. Donc $PO^2 = OR \times OH$. *Par la troisième proposition (numero 132).* On a cette analogie. $CT^2 : CM^2 :: CT^2 - CO^2$ ou $IO \times OT : PO^2$. Donc $PO^2 = (CT^2 - CO^2) \times \frac{CM^2}{CT^2}$ & (*numero* 163). $OH = \frac{CT^2 - CO^2}{CO}$; Donc en substituant ces valeurs dans l'égalité précédente, on aura $(CT^2 - CO^2) \times \frac{CM^2}{CT^2} = OR \times (\frac{CT^2 - CO^2}{CO}) = \frac{OR}{CO} \times (CT^2 - CO^2)$.

Ou en divisant chaque membre par $CT^2 - CO^2$ $\frac{CM^2}{CT^2} = \frac{OR}{CO}$; Donc $CO \times CM^2 = OR \times CT^2$. D'où l'on tire $CO : OR :: CT^2 : CM^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

171. Plus l'abscisse *CO* sera petite, plus aussi la sou-normale *OR* sera petite, & réciproquement, plus l'abscisse *CO* sera grande, plus la même sou-normale sera grande; car pour que ces grandeurs conservent toujours

entr'elles le rapport constant de CT^2 à CM^2; Il faut que l'une augmente ou diminue en même temps que l'autre.

COROLLAIRE II.

172. Si le point P s'approche continuellement du point T, l'ordonnée PQ deviendra infiniment petite, l'abscisse CO pourra être considerée, comme égale à CT, & la sounormale QR deviendra dans ce cas TR; ce qui n'empêche pas la proportion de subsister. Elle devient alors $CT : TR :: CT^2 : CM^2$, donc $CT \times CM^2 = CT^2 \times TR$, & divisant chaque membre par CT, $CM^2 = CT \times TR$, d'où l'on tire $CT : CM :: CM : TR$. Ce qui montre que la sou-normale est égale à la moitié du parametre de l'axe, selon la définition de ce même parametre (No 136), lorsque l'abscisse CO est égale à la moitié du grand axe. Et de plus, que le même demi parametre, est la plus grande sou-normale possible, puisqu'elle répond à la plus grande abscisse que l'on puisse trouver sur l'axe à partir du centre.

COROLLAIRE III.

173. Il suit encore de cette proposition, qu'ayant pris du point T vers le centre C sur l'axe IT, une partie TS égale à la moitié du parametre; les points C S seront les limites de toutes les perpendiculaires que l'on pourra mener aux différents points du quart de l'ellipse MPT, ensorte qu'aucune perpendiculai-

re à l'ellipſe ne pourra tomber entre les points $S\ T$. Quoique cette propoſition ſe déduiſe immédiatement de la préſente, cependant comme elle pourroit n'être pas ſaiſie avec la même facilité de tout le monde ; nous allons la démontrer directement. Toute cette démonſtration ſe réduit à faire voir que la ſomme TR d'une abſciſſe quelconque OT, ſi petite qu'elle ſoit, & de la ſou-normale correſpondante OR ſera toujours plus grande que la moitié du parametre.

Démonſtration du Corollaire.

Puiſque $CO : OR :: CT^2 : CM^2$ donc $OR = \frac{CM^2 \times CO}{CT^2}$ mais $OT = CT - CO$. Donc $OT + OR$ ou $TR = CT - CO + \frac{CM^2 \times CO}{CT^2}$ & réduiſant $CT - CO$ au même dénominateur CT^2 ; On aura $TR = \frac{CT^2 \times CT - CT^2 \times CO + CM^2 \times CO}{CT^2}$
Il eſt aiſé de voir que cette expreſſion eſt plus grande que la moitié du parametre de l'axe ; pour s'en convaincre, il n'y a qu'à ſuppoſer pour un inſtant qu'elle lui ſoit égale ; on aura $\frac{CT^2 \times CT - CT^2 \times CO + CM^2 \times CO}{CT^2} = \frac{CM^2}{CT}$ puiſque le demi-parametre eſt troiſiéme proportionelle aux deux demi-axes ; multipliant chaque membre par CT^2, on aura
$CT^2 \times CT - CT^2 \times CO + CO \times CM^2 = CM^2 \times CT$
ôtant de chaque membre $CM^2 \times CO$ il viendra
$CT^2 \times CT - CT^2 \times CO = CM^2 \times CT - CM^2 \times CO$
ou $CT^2 \times (CT - CO) = CM^2 \times (CT - CO)$.
Et diviſant chaque membre par $CT - CO$,
$CT^2 = CM^2$; quoique ce réſultat ſoit faux,

il se trouve en *R*, entre le centre *C* & l'ordonnée *PO*. On déduira de cette proposition précisément les mêmes corollaires que de la précédente ; c'est pourquoi il seroit inutile de les répéter ici. *

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

278. *Si par un point* P *de l'ellipse* (Fig. 43.), *on mene une tangente* PH *jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe* IT *en* H, *& par le point* T *origine du même axe, la droite* BT *perpendiculaire au même axe & tangente en ce point, jusqu'à ce qu'elle rencontre le diametre* CP *aussi prolongé jusques en* B, *je dis que le triangle* PAB, *formé par les tangentes* BT PH *& le diametre* CPB *est égal au triangle* TAH, *formé par les mêmes tangentes avec le prolongement* TH *de l'axe* IT.

DÉMONSTRATION.

Par le point *T* origine de l'axe soit menée la droite *TD* paralléle à la tangente *PH*, du point *P*, soit menée la droite *PO* perpendiculaire & ordonnée à l'axe *IT*, & par conséquent paralléle à *BT*, à cause des paralléles *TD*, *PH*. Les triangles *CDT*, *CPH* seront semblables, & donneront

CD : *CP* :: *CT* : *CH* & *par la* 17eme *propos.*

CT : *CH* :: *CO* : *CT*, & à cause des triangles semblables *CTB* *COP*,

CO : *CT* :: *CP* : *CB*.

D'où l'on déduira les trois proportions suivantes.

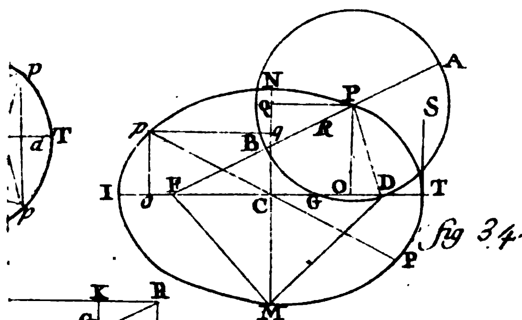
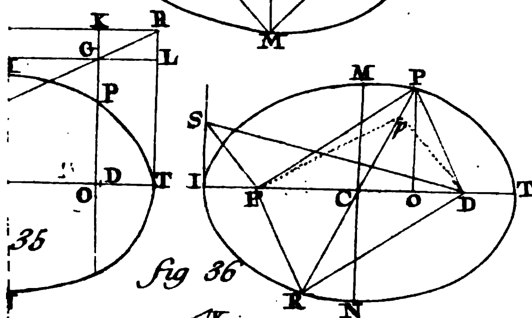


fig 34.



35

fig 36

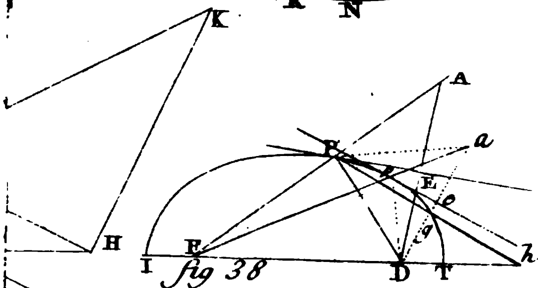


fig 38

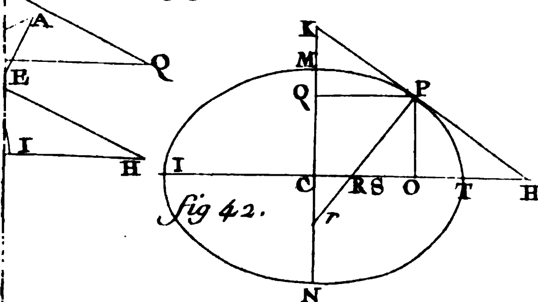


fig 42.



CB:CP::CP:CB ; CD;CP::CO:CT , & CP:CB::CT:CH , qui nous montrent que les lignes *DO PT BH* sont paralléles entr'elles, puisque les lignes *CB CH* sont coupées par les mêmes droites en parties proportionelles. Donc les triangles *PTB PTH*, qui ont même base *PT* & sont compris entre les paralléles *PT DH*, sont égaux entr'eux ; & ôtant encore de ces triangles égaux, le triangle *PAT* qui leur est commun, il restera d'une part, le triangle *PAB* égal au triangle *PAH* de l'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE. I.

179. Il suit de cette proposition 1° que les triangles *PDT POT*, compris entre les paralléles *PT DO*, & appuyés sur la base commune *PT* sont égaux entr'eux. Donc en leur ajoûtant les triangles égaux *PTB PTH*, on aura $PDT+PTH=POT+PTB$, ou en réduisant $PDTH=POTB$.

2° Si l'on ajoûte les mêmes triangles *PTB PTH*, au seul triangle *POT*, on aura $POT+PTH=POT+PTB$, ou, ce qui revient au même, le triangle *PQH* égal au quadrilatere *POTB*.

3° Si l'on ajoûte les mêmes triangles *PTB PTH*, au seul triangle *PDT*, on aura $PDT+PTB=PDT+PTH$ ou en réduisant, le triangle *BTD* égal au trapese *POTB*.

4° Enfin si l'on ajoûte à ces triangles égaux *PTB PTH* le triangle commun *CPT* ; on

aura le triangle CTB d'une part, égal au triangle CPH de l'autre.

Corollaire II.

180. Si par l'autre extrémité de l'axe IT, on mene la tangente alb perpendiculaire à cet axe, prolongée de part & d'autre jusqu'à ce qu'elle rencontre la tangente PH en a, & le diametre PCp aussi prolongé en b on aura :

1°. Le triangle Pab égal au triangle IaH, car à cause des paralléles BT, bI perpendiculaires à l'axe IT, les triangles CIb CTB seront rectangles & égaux, puisqu'ils ont outre l'angle droit, l'angle C égal de part & d'autre, ainsi que le côté CT égal au côté CI. Mais, *par le quatriéme article du corollaire précédent* $CTB = CPH$ donc aussi, $CIb = CPH$ & ajoûtant de part & d'autre le quadrilatere $CPaI$, on aura le triangle Pab égal au triangle IaH.

2°. Si par le point p, extrémité du diametre Pp, on mene l'ordonnée po & la tangente ph jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe IT en h, on démontrera aisément que le triangle Cph est égal au triangle CIb, de la même maniere que le triangle CPH a été démontré égal au triangle CTB. Car puisque le diametre Pp est coupé en deux également au centre C (*num.* 143), Les triangles rectangles COP, Cop seront égaux, ayant un angle égal en C & des hypothénuses égales CP cp. Donc $Co = CO$. De plus on démontrera que le point h se déterminera comme le point H, en faisant

$Co : CI :: CI : Ch$. Donc on aura $Ch = CH$. Donc le rriangle Cph sera égal au triangle CPH, & ph sera paralléle à PH, puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux CP CH Cp Ch. Donc enfin $Cph = CIb$ puisque $CIb = CPH$.

3°. Il suit encore delà que le trapese $poIb$ sera égal au triangle poh en ôtant des triangles égaux CIb Cph, le triangle commun Cop.

4°. Enfin si l'on mene par le point I origine de l'axe, la ligne Id paralléle à ph & terminée au diametre Cp ; on aura le triangle bId égal au quadrilatere $pdIh$; en ôtant des triangles égaux CIb Cph, le triangle commun CId.

Corollaire III.

181. Puisque les triangles CTB CPH sont égaux, les parallélogrammes formés sur ces mêmes lignes CT TB CP PH & doubles de ces triangles, seront aussi égaux entr'eux.

Lemme.

182. *Si l'on prolonge le côté* CT *d'un triangle* CTB (fig. 44), *ensorte que le prolongement* CI *soit égal à* CT, *&* *que par des points* OG, *pris comme on voudra sur le côté* CT, *on mene les droites* OP GF *paralléles à* BT, *je dis que les rectangles* $IO \times OT$, $IG \times GT$ *seront entr'eux comme les trapeses* POTB GTBF, *c'est-à-dire que l'on aura cette proportion*

$$IO \times OT : IG \times GT :: POTB : GTBF.$$

DÉMONSTRATION.

Puisque les droites PO, BT sont parallèles, les triangles CTB COP, seront semblables, & l'on aura $CT^2 : CO^2 :: CTB : COP$. Donc *divid.* $CT^2 - CO^2 : CT^2 :: CTB - COP : COP$. Mais, *par le lemme fondamental*

$$CT^2 - CO^2 = IO \times OT.$$

Et faisant la réduction $CTB - COP = POTB$.
Donc $IO \times OT : CT^2 :: POTB : CTB$.
Et *alternando* $IO \times OT : POTB :: CT^2 : CTB$.
De même, puisque les droites BT GF sont parallèles, les triangles CGF, CTB seront semblables & donneront $CT^2 : CG^2 :: CTB : CGF$, donc *dividen.* $CT^2 - CG^2 : CT^2 :: CTB - CGF : CTB$.
Mais, *par le lemme fondamental*

$$CT^2 - CG^2 = IG \times GT.$$

Et faisant la réduction, $CTB - CGF = GTBF$.
Donc $IG \times GT : CT^2 :: GTBF : CTB$.
Et *alternando* $IG \times GT : GTBF :: CT^2 : CTB$.
Donc, puisque les deux proportions résultantes ont la même raison de CT^2 à CTB. Les deux premières seront aussi égales & donneront

$$IO \times OT : POTB :: IG \times GT : GTBF,$$

& *alternando* $IO \times OT : IG \times GT :: POTB : GTBF$.
Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIV.

THÉOREME.

182. *Supposant toutes choses comme dans les propositions précédentes, si par un point* E *ou* e *de l'ellipse* (Fig. 45, 46, 47), *on mene une droite*

EF *parallèle à la tangente* BT *& une autre droite* ELM *parallèle à la tangente* PH, *je dis que le triangle* EGM *formé par ces deux droites avec l'axe* IT, *est égal au quadrilatere* GTBF *formé par les parallèles* GT BF, *la partie* GT *de l'axe & la partie* BF *du diametre* CP.

DÉMONSTRATION.

Cette proposition renferme deux cas principaux.

Le 1er, lorsque le point *E* ou *e*, est pris de maniere que le point *M* se trouve sur la partie *CH* de l'axe *IT*, & le point *L* sur la partie *CP* du diametre.

Le second, lorsque le point *e* ou *é* est pris de maniere que la droite *eml* coupe l'axe *IT* dans la partie *Ch* en *m*, & le diametre dans la partie *Cp* en *l*. Chacun de ces cas en renferme quatre autres, que nous allons détailler, afin qu'il ne reste aucune difficulté sur cette proposition.

1ier Cas. Lorsque le point *E* se trouve entre les points *P* & *T*, ou bien entre les points *I p* comme en *e* (Fig. 45).

2eme Cas Lorsque le point *E* est au-delà de *P* par rapport au point *T*, comme en *e*, ou bien en *é* au-delà du point *p* à l'égard du point *I* (Fig. 45.) de maniere que le point *g*, tombe sur la partie *CT*, & le point *g'* tombe sur la partie *CI* du même axe.

Troisiéme Cas. Lorsque le point *E* étant toujours au-delà de *P* par rapport à *T*, est placé de

maniere que le point G tombe sur la partie CI de l'axe (Fig. 46.) ou lorsqu'étant toujours au-delà du point p par rapport au point I, le point g tombe sur la partie CT.

Quatriéme Cas; lorsque le point E (Fig. 47.) est au-delà du point T à l'égard de P, ou bien en e, au-delà du point I par rapport au point p; ensorte que le point G tombe sur CT & le point g tombe sur CI.

DÉMONSTRATION *du 1er cas.*

Puisque les droites EG PO, EM PH sont paralléles, (fig. 45.) les triangles POH EGM formés par les mêmes lignes avec l'axe IT seront semblables, & l'on aura

$POH : EGM :: PO^2 : EG^2$ (*numero* 33.)

$PO^2 : EG^2 :: IO \times OT : IG \times GT$

& par le lemme précédent

$IO \times OT : IG \times GT :: POTB : GTBF$.

Donc $POH : EGM :: POTB : GTBF$. *Mais par le second article du Corollaire premier de la vingt-troisiéme Prop.* $POH = POTB$ donc $EGM = GTBF$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Si le point E est en e entre les points I p, on démontrera précisément de la même maniere, que le triangle egm sera égal au quadrilatere $gIbf$, en prenant le triangle poh au lieu du triangle POH.

DÉMONSTRATION *du 2eme cas.*

Si le point est en e au-delà du point P par rapport au point T, de maniere que le point g

(Fig.

(fig. 45.) tombe toujours sur la partie *CT*. Les triangles *egM POH* seront toujours semblables, & on démontrera précisément comme dans le premier cas, que le triangle *egM* est égal au quadrilatere *gTBf*.

Et si le point *E* est en *é* au-delà du point *p* à l'égard de l'axe, ensorte que la ligne *ég'* coupe l'axe dans la partie *CI*, on aura toujours *ég'm* = *g'Ibf'*.

DÉMONSTRATION *du* 3[eme] *cas.*

Si le point *E*, étant toujours au-delà du point *P* à l'égard de *T* (fig. 46.), est pris de maniere que la droite *EG* tombe sur la partie *CI* de l'axe, on comparera le triangle *EGM* à son semblable *poh*, & l'on démontrera comme dans le premier cas, que ce même triangle est égal au quadrilatere *GIbF*. Puisque le triangle *poh* est égal au quadrilatere *poIb*. (*num.* 180 *art.* 3°).

Si dans la même figure le point *e* étant toujours au-delà du point *p* à l'égard du point *I*, est pris de maniere que la droite *eg* tombe sur la partie *CT* de l'axe, on aura encore le triangle *egm* égal au quadrilatere *gTBf*, en comparant ce même triangle *egm* au triangle *POH*, qui lui est semblable, puisqu'il a les côtés paralléles à ceux du premier.

DEMONSTRATION *du* 4[eme] *cas.*

Enfin lorsque le point *E* est au-delà de *T* par rapport à *P*, (fig. 47.) de maniere que la ligne *EG* tombe sur *CT*, les triangles *POH*

H

EGM étant toujours semblables donneront les mêmes proportions, & partant dans ce cas comme dans les précédents, *EGM* = *GTBF*.

Ce seroit de même si le point étoit en *e*, ensorte que la droite *eg* coupât l'axe dans la partie *CI* : d'où il suit que la proposition est vraie dans tous les cas possibles : *ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE

On remarquera que les premiers articles de ces démonstrations ont rapport au premier cas principal, qui est lorsque le point M *tombe sur la partie* CT *& le point* L *sur le demi diametre* CP, *& les seconds ont rapport au second cas principal, qui arrive lorsque le point* M *tombe sur la partie* CI *de l'axe* IT *& le point* L *dans la partie* Cp *du diametre* PCp.

PROPOSITION XXV.

THÉORÊME.

183. *Supposant toutes choses dans le même état que dans la proposition précédente, je dis que le triangle* ELF *ou* elf *ou* eLf, (Fig. 45. 46. 47.) *formé par les droites* LEM *ou* elm, EGF *ou* egf *paralléles aux tangentes* BT PH, *avec le diametre* CP, *est égal au quadrilatere* LPHM *ou* lphm, *formé par la tangente* PH *sa paralléle* LEM, *la partie* LP *du diametre & la partie* MH *de l'axe* IT *prolongé s'il est nécessaire.*

DÉMONSTRATION.

Cette proposition ainsi que la précédente

renferme deux cas principaux. Le premier est lorsque le point M tombe dans la partie CH de l'axe IT, & le point L dans la partie CP du diametre pCP.

Le second arrive lorsque les points M L tombent en ml, dans les parties opposées de l'axe & du diametre. Chacun de ces cas en renferme quatre autres qui se démontrent dans l'un & dans l'autre, précisément de la même maniere; c'est pourquoi l'on ne donnera que la démonstration des quatre cas qui sont renfermés dans le premier cas principal.

1er *Cas.*

Si le point E se trouve entre les points P & T (fig. 45.) *Par le quatrieme article du Corollaire premier de la vingt-troisieme Prop.* on a $CTB = CPH$. Donc en ôtant de chaque membre le quadrilatere commun $CGEL$, on aura

$$CTB - CGEL = CPH - CGEL.$$

ou $$GTBLE = EGHPL.$$

ôtant encore de chaque membre de cette derniere égalité des quantités égales, sçavoir du premier le quadrilatere $GTBF$, & du second le triangle EGM, qui lui est égal *par la précédente proposition*, on aura $GTBLE - GTBF = EGPHL - EGM$, ou en réduisant $ELF = LPHM$. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

2eme *Cas*

Si le point E se trouve en e, (Figure 45.) de maniere cependant que la droite eg tombe

ſur la partie CT de l'axe IT, *par la propoſition précédente*, $egM = gTBf$, mais $gTBf = gfPH$ en ôtant du quadrilatere $gTBf$, le triangle PAB, & ajoutant au reſte $PfgTA$, le triangle TAH égal au précédent par *la vingt-troiſiéme Prop.* Donc $egM = gfPH$. Otant encore de chaque membre, le quadrilatere commun $fgML$, on aura d'une part le triangle eLf égal au quadrilatere $LPHM$ de l'autre : *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

3eme *Cas.*

Si l'on ſuppoſe encore le point E en E au-delà du point P à l'égard de T, mais de maniere que la droite EGF coupe l'axe dans la partie CI, & le diametre dans la partie Cp, (Fig. 46), on a dans ce cas *par la précédente propoſition*, $EGM = GIbF$. Ajoûtant à chaque membre le triangle CFG, on aura

$$EFCM = CIb = CTB = CPH.$$

par le quatriéme article du corollaire 1er de la vingt-troiſiéme. Donc en ôtant de chaque membre le triangle CLM, on aura $EFCM - CLM = CPH - CLM$, ou, en réduiſant $ELF = LPHM$. *C. Q. F. 3° D.*

4eme *Cas.*

Enfin ſi le point E eſt au-dela de l'axe IT par rapport au diametre CP, (fig. 47), de maniere cependant que les points ML tombent ſur CT & ſur CP ; on a *par la précédente* $EGM = GTBF$. Ajoûtant à chaque membre le quadrilatere $MGFL$, on aura

le triangle *ELF*=*BTML* : ôtant du dernier membre de cette égalité le triangle *PAB*, & mettant à sa place le triangle *TAH* qui lui est égal *par la vingt-troisiéme*, on aura encore *ELF*=*LPHM*. *Ce qu'il falloit* 4°. *démontrer.*

COROLLAIRE.

184. Si l'on imagine que les points *L* & *M* (Fig. 48) approchent continuellement du centre *C*, enfin la droite *EML* se confondra avec le diametre *RCr* & le triangle *ELF* deviendra le triangle *RCF*, le quadrilatere *LPHM* sera confondu avec le triangle *CPH*, d'où il suit que les triangles *CPH*, *CRF* seront égaux entr'eux, puisque dans tous les cas le triangle *ELF* à été démontré égal au quadrilatere *LPHM*.

PROPOSITION XXVI.

THÉOREME.

185. *Dans une ellipse* IPT *dont l'axe est la ligne* IT, PCp *un diametre &* PH *une tangente à l'origine de ce diametre, terminée à l'axe en* H; *je dis que toute ligne, comme* Ee *paralléle à la tangente* PH, *est coupée en deux également en* L *par le diametre* PCp. (Fig. 45, 46, 47 & 48).

DÉMONSTRATION.

Supposant que l'on ait mené les droites *EF*, *éf*, *ef* *eF* paralléles à la tangente *BT*, il est évident *par la propo. précéd*, que les triang. *ELF*,

toujours cette proportion $EL^2 : LP \times Lp :: CR^2 : CP^2$

DÉMONSTRATION.

A cause des triangles semblables ELF, RCF, on a $EL^2 : CR^2 :: ELF : RCF$. Mais *par la propofition* 25. $ELF = LPHM$ & (*numero* 184) $RCF = CPH$.
Donc $ELF : RCF :: LPHM : CPH$, & *par le lemme de l'article* 181. $LPHM : CPH :: PL \times Lp : CP^2$.
Donc $EL^2 : CR^2 :: PL \times Lp : CP^2$ & *alternando* $EL^2 : PL \times Lp :: CR^2 : CP^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

193. Puifque l'on a $EL^2 : PL \times Lp :: CR^2 : CP^2$, on aura auffi $EL^2 : PL \times Lp :: Pp^2 : Rr^2$. Car Pp étant double de CP, & Rr double de CR leurs quarrés Pp^2 Rr^2 feront quadruples des quarrés CP^2 CR^2, ce qui ne peut pas troubler la proportion.

COROLLAIRE II.

194. Si l'on mene une autre ordonnée el au même diametre CP, on aura encore $el^2 : Pl \times lp :: CR^2 : CP^2$. Mais on a auffi $EL^2 : PL \times Lp :: CR^2 : CP^2$.
Donc puifque les deux derniers rapports de ces proportions font les mêmes, les premiers feront auffi égaux, & partant on aura

$$EL^2 : PL \times Lp :: el^2 : Pl \times lp.$$

Et *alternando* $EL^2 : el^2 :: PL \times Lp : Pl \times lp$; d'où il fuit que les quarrés des ordonnées à un même diametre font entr'eux comme

les produits des abſciſſes correſpondantes.

COROLLAIRE III.

195. Si les diametres conjugués ſont égaux, les quarrés des ordonnées ſeront égaux aux produits de leurs abſciſſes, & ces mêmes ordonnées ſeront moyennes proportionelles entre les mêmes abſciſſes. Quoique cette propriété ſoit la principale propriété du cercle, il ne faut pas conclure pour cela, qu'une courbe ſera un cercle, toutes les fois que le rectangle des abſciſſes ſera égal au quarré de l'ordonnée, à moins que l'ordonnée ne faſſe un angle droit avec ſon diametre. Car en réuniſſant ces deux conditions enſemble, la figure ne peut être qu'un cercle, dans la ſuppoſition que la courbe eſt terminée. au lieu qu'elle ne peut être qu'une ellipſe dans le cas de tout autre angle.

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÊME.

196. *Suppoſant toujours les choſes dans le même état : ſi par un point* E *de l'ellipſe, on mene une droite* Ee, (Fig. 49). *paralléle au diametre* CP, *je dis que cette ligne ſera coupée en deux également en* O *par le diametre* rCR *conjugué au premier* CP, *& de plus que l'on aura cette proportion.*

$$OE^2 : rO \times OR :: CP^2 : CR^2.$$

DÉMONSTRATION.

1°. Par les points *E e* ſoient menées les droites *EL el* paralléles à la tangente *PH* & parconſéquent au diametre conjugué *CR*. Par

la proposition précédente on a (*numero* 194).
$EL^2 : el^2 :: pL \times PL : pl \times Pl :: CP^2 - CL^2 : Cp^2 - Cl^2$.
Car *par le lemme fonda.* $pL \times PL = CP^2 - CL^2$.
Et $pl \times Pl = Cp^2 - Cl^2$; puisque la droite Pp est coupée en deux parties égales en C & en deux parties inégales en L & l. Mais à cause des paralléles Pp Ee, les droites EL el aussi paralléles entr'elles, sont des ordonnées égales. Donc $EL^2 = el^2$ Donc $CP^2 - CL^2 = Cp^2 - CL^2$. Mais $CP^2 = Cp^2$. Donc aussi $CL^2 = Cl^2$. Donc $CL = Cl$ & partant $EO = eO$. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

2°. $OE^2 : RO \times Or :: CP^2 : CR^2$. Car *par la précédente proposition*
$EL^2 : PL \times Lp$ ou $CP^2 - CL^2 :: CR^2 : CP^2$.
Donc *alternando.* $EL^2 : CR^2 :: CP^2 - CL^2 : CP^2$.
Donc *detrahendo.*

$$CR^2 : CR^2 - EL^2 :: CP^2 : CP^2 - CP^2 + CL^2.$$

Et *réduit.* $CR^2 : CR^2 - CO^2$ ou $RO \times Or :: CP^2 : CL^2$ ou OE^2. Donc *invert.* $OE^2 : CP^2 :: RO \times Or : CR^2$. Et enfin *altern.* $OE^2 : RO \times Or :: CP^2 : CR^2$. *Ce qu'il falloit* 2° *démontrer.*

Corollaire. I.

197. On aura comme dans la proposition précédente $OE^2 : RO \times Or :: Rr^2 : Pp^2$ & si l'on mene une autre ordonnée eo paralléle au diametre PCp; on aura encore

$$OE^2 : oe^2 :: RO \times Or : Ro \times or :: CR^2 - CO^2 : CR^2 - co^2.$$

Corollaire II.

198. Si par le point R on mene RX pa-

rallèle à Pp, cette ligne sera tangente en R. Car puisque le diametre rR est conjugué au diametre pP, & parallèle à la tangente PH, réciproquement le diametre pP sera conjugué au diametre rR, & la tangente en R lui sera parallèle.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÊME.

199. *Soit une ellipse* prPR, *dont* Pp Rr (Fig. 49) *sont deux diametres conjugués*, EL *une ordonnée au diametre* Pp, *dont les abscisses sont* LP Lp ; *si par le point* P *origine du diametre* Pp, *on éleve la perpendiculaire* PM *égale au parametre de ce diametre, & qu'ayant joint les points* pM, *par la droite* pM, *on fasse cette proportion* $Pp:PM::pL:LN$ *ou* PK, *je dis que le quarré de l'ordonnée* EL *sera égal au produit de cette droite* PK *par l'abscisse* PL, *ou, ce qui revient au même, que l'on aura cette égalité* $EL^2=PK\times PL$.

DÉMONSTRATION.

Par le corollaire 1er *de la vingt-septiéme proposition* (*N*° 193), on a $PL\times Lp:EL^2::Pp^2:Rr^2$ & par la propriété du parametre

$$Pp^2:Rr^2::Pp:PM$$ & par hypothese on a fait $$Pp:PM::pL:PK.$$

Donc $PL\times Lp:EL^2::Lp:PK::Lp\times PL:PK\times PL$.

Mais $PL\times Lp=Lp\times PL$ donc aussi $EL^2=PK\times PL$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE. I.

200. Si l'on acheve le rectangle du diame-

tre Pp par son parametre, & qu'on prolonge les droites LN KN, jusqu'à ce qu'elles rencontrent les côtés VM Vp de ce rectangle aux points I S; il est visible que les rectangles MN pN seront semblables au rectangle total pM, car puisque l'on a fait $pP:PM::pL:LN$ ou PK, on aura *altern.* $pP:pL::PM:PK$ & *dividendo* $Pp-pL:pP::PM-PK:PM$ réduisant & alternant LP ou $KN:KM::pP:PM$, d'où il suit que les rectangles MN pN, ont les côtés proportionels à ceux du rectangle total pM, & lui sont par conséquent semblables.

Corollaire. II.

201. Puisque l'on a $EL^2=LP\times PK$, on aura aussi $EL^2=Lp\times MK$, ou $SN\times IN$, car il est évident que les rectangles PN VN sont égaux, puisqu'ils les ont côtés réciproques autour de l'angle droit. D'où il suit que généralement le quarré d'une ordonnée à un diametre quelconque, est égal au rectangle de l'une de ses abscisses PL ou pL par le parametre, moins un rectangle semblable à celui du diametre par le même parametre. Car $PN=LP\times PM-LP\times MK$, ou, ce qui est la même chose, le rectangle PN est égal au rectangle PI moins le rectangle MN qui est semblable au rectangle pM *par le corollaire précédent*, Et de même $VN=pL\times PM-pL\times NL$. Ce qui montre suffisament que les propriétés des diametres sont précisément les mêmes que

celles des axes, & c'est de cette derniere propriété, commune à tous les diametres, que l'ellipse prend son nom, comme on l'a déja démontré par rapport aux axes, (N° 140).

LEMME.

* 202. *Une ellipse* ADBE (Fig. 50); *dont* AB DE *sont deux diametres conjugués, étant donnée; si par un point* R *pris au dedans ou au dehors de cette courbe on mene une droite* RFG *parallele au diametre* DE, *& que par le point* R *& les points* FG, *ou cette ligne rencontre l'ellipse on mene les droites* RO FL GM, *paralleles à l'autre diametre* AB *& terminés au diametre* DE, *je dis que la différence des rectangles.*

$EO \times OD - EL \times LD = LO \times OM$ *dans le premier cas, & que dans le second cas*

$$EL \times LD - EO \times OD = LO \times OM.$$

DÉMONSTRATION.

1° Supposons d'abord que le point *R* est pris au dedans de l'ellipse, en ce cas $EO = EL + LO$, & $OD = LD - LO$. Donc $EO \times OD = EL \times LD + LO \times LD - EL \times LO - LO \times LO$. Donc en faisant passer dans l'autre membre $EL \times LD$, on aura $EO \times OD - EL \times LD = LO \times LD - EL \times LO - LO \times LO = (LD - EL - LO) \times LO$. Mais à cause des paralleles *DE GR* les ordonnées *MG LF* sont égales, & partant leurs abscisses *CM CL* le seront aussi (195). Donc $EL = MD$,

Donc $(LD-EL-LO)\times LO=(LD-MD-LO)\times LO=(LM-LO)\times LO=OM\times LO$. Donc $EO\times OD-EL\times LD=OM\times LO$. C. Q. F. 1° D.

2° Supposons présentement que le point *R* est au dehors de l'ellipse ; on aura dans ce cas $EL=EO+LO$, & $LD=OD-LO$. Donc $EL\times LD=EO\times OD+LO\times OD-EO\times LO-LO\times LO$. Donc en faisant passer dans le premier membre $EO\times OD$, on aura $EL\times LD-EO\times OD=LO\times OD-EO\times LO-LO\times LO=(OD-EO-LO)\times LO$. Mais $EO+LO=EL=MD$, puisque les ordonnées *LF GM* sont égales, donc $(OD-EO-LO)\times LO=(OD-MD)\times LO=OM\times LO$, donc $EL\times LD-EO\times OD=OM\times LO$. *Ce qu'il falloit 2° démontrer.* *

PROPOSITION XXX.

Théorème.

203. *Si deux droites quelconques* FG IH, *parallèles à deux diametres conjugués d'une ellipse, se rencontrent dans un point* R *au dedans ou au-hors de cette courbe* (Fig. 50). *Je dis que les rectangles des sécantes seront entr'eux comme les quarrés des diametres qui leur sont parallèles, c'est-à-dire que l'on aura* $HR\times RI:FR\times RG::AB^2:DE^2$.

Démonstration.

1er *Cas.* Supposons d'abord que les droites *FG IH* se coupent au dedans de l'ellipse. Des points *F G* où l'une d'elles rencontre la courbe, soient menées les droites *FL GM*

paralléles au diametre CB, qui seront par la même raison ordonnées au diametre CE conjugué au premier (*numero* 185 & 187). Celà posé, puisque les droites OI LF sont ordonnées au même diametre GE ; on aura (N° 193) $LF^2 : OI^2 :: EL \times LD : EO \times OD$. Donc *dividendo*

$OI^2 - LF^2 : LF^2 :: EO \times OD - EL \times LD : EL \times LD$. Mais $OI^2 - LF^2 = OI^2 - OR^2$ puisque LF est égal à OR à cause des paralléles ED GR, & par *le lemme fonda.* $OI^2 - OR^2 = HR \times RI$ puisque la ligne IH est coupée en deux parties égales en O, par le diametre DE auquel elle est ordonnée, & en deux parties inégales au point R. De plus *par le lemme précédent* $EO \times OD - EL \times LD = LO \times OM$. Donc en substituant ces nouvelles valeurs dans la proportion précédente, elle deviendra celle-ci $HR \times RI : LF^2 :: LO \times OM : EL \times LD$. Mais à cause des paralléles LF, GM, FG, ML, on a $LO = RF$ & $OM = RG$ donc $LO \times OM = FR \times RG$. Donc en mettant cette nouvelle expression on aura $HR \times RI : LF^2 :: FR \times RG : EL$. Où *alternando* $HR \times RI : FR \times RG :: LF^2 : EL \times LD$. Et (*num.* 195). $LF^2 : EL \times LD :: CB^2 : CE^2$. Donc $HR \times RI : FR \times RG :: CB^2 : CE^2$. Ce qu'il falloit 1° démontrer.

2eme *Cas.* Si les droites FG IH se coupent au dehors de l'ellipse, on aura à cause des ordonnées LF OI au diametr DE, $CE^2 : LF^2 : OI^2 :: EL \times LD : EO \times OD$. Donc *divid.*

$LF^2 - OI^2 : OI^2 :: EL \times LD - EO \times OD : EO \times OD$

Mais $LF^2 - OI^2 = OR^2 - OI^2$; puisque $OR = LF$, *& par le lemme fondamental*, $OR^2 - OI^2 = HR \times RI$, de plus *par le lemme précéd.* $EL \times LD - EO \times OD = LO \times OM = FR \times RG$, puisque $LO = FR$, & que $OM = RG$, comme il est évident à cause des parallélogrammes $ROLF$ $OMGR$: donc en substituant ces nouvelles expressions à la place de leurs égales, la proportion précédente deviendra celle-ci. $HR \times RI : OI^2 :: FR \times RG : EO \times OD$. Ou *alternando* $HR \times RI : FR \times RG :: OI^2 : EO \times OD$ & (*numero* 195). $OI^2 : EO \times OD :: CB^2 : CE^2$.

Donc $HR \times RI : FR \times RG :: CB^2 : CE^2$. *Ce qu'il falloit 2° démontrer.*

REMARQUE.

* *La proposition que l'on vient de démontrer dans le cas ou les sécantes sont paralléles à des diametres conjugués, est encore vraye dans tout autre cas, c'est-à-dire, lorsque les diametres paralléles aux sécantes intérieures ou extérieures, ne sont pas conjugués l'un à l'autre; c'est pourquoi nous allons joindre les propositions suivantes pour la démontrer dans toute la généralité qui lui convient. Elles sont d'autant plus intéressantes qu'elles servent à la solution des problêmes les plus curieux que l'on puisse proposer sur les sections coniques, au moins dans les élements, & que l'on démontre par leur moyen toutes les propriétés du cercle d'une maniere générale par des corollaires qui sont des suites immédiates de ces mêmes propositions.*

Proposition

PROPOSITION XXXI.

THÉOREME.

204. *Ayant une tangente* DS (*fig.* 51) *terminée en* S *par le prolongement d'un diametre quelconque* CH, *si par le centre* C, *on mene le diametre* LCI *paralléle à la tangente* DS, *je dis que l'on aura* $DS^2 : SR \times SH :: CL^2 : CH^2$, *c'est-à-dire que le quarré de la tangente* DS, *sera au rectangle de la sécante entiere* SR *qui passe par le centre, par sa partie extérieure* SH, *comme le quarré du demi diametre* CL *paralléle à cette tangente, est au quarré du demi diametre* CH *dont le prolongement va rencontrer la tangente en* S.

DÉMONSTRATION.

Par l'origine *H* du diametre *CH* soit menée l'ordonnée *HK* au diametre *CD* qui passe par le point touchant *D*, & paralléle à la même tangente. Les triangles *CDS CKH* seront évidemment semblables, & donneront $CH:CS::KH:DS$ donc $DS=\frac{CS\times KH}{CH}$ & partant $DS^2=\frac{CS^2\times KH^2}{CH^2}$ Mais *KH* étant une ordonnée au diametre *CD*, on aura (*par la* 27eme *proposition num.* 191).
$KH^2:CD^2-CK^2::CL^2:CD^2$; puisque le diametre *CL* est conjugué au diametre *CD*. D'où l'on déduit $KH^2=\frac{(CD^2-CK^2)\times CL^2}{CD^2}$ Mais à cause des mêmes triangles semblables *CKH CDS*, on a $\frac{CD^2-CK^2}{CD^2}=\frac{CS^2-CH^2}{CS^2}$. Car $CD:CK::CS:CH$, donc $CD^2:CK^2::CS^2:CH^2$.

& divid. $CD^2 - CK^2 : CD^2 :: CS^2 - CH^2 : CS^2$ ou bien en mettant les rapports égaux de cette proportion sous la forme d'une fraction $\frac{CD^2 - CK^2}{CD^2} = \frac{CS^2 - CH^2}{CS^2}$, Et substituant cette derniere expression dans la valeur de KH^2, on aura $KH^2 = \frac{CS^2 - CH^2}{CS^2} \times CL^2$ d'où l'on déduit en substituant encore cette nouvelle valeur de KH^2 dans l'expression de DS^2, cette nouvelle égalité $DS^2 = \frac{CS^2}{CH^2} \times \frac{CS^2 - CH^2}{CS^2} \times CL^2 = \frac{CS^2 - CH^2}{CH^2} \times CL^2$ d'où l'on tire aisément $DS^2 : CS^2 - CH^2 :: CL^2 : CH^2$. Mais *par le lemme fondamental* $CS^2 - CH^2 = SR \times SH$, donc enfin on aura $DS^2 : SR \times SH :: CL^2 : CH^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

205. Si les diametres CH CL sont égaux, leurs quarrés le seront aussi, & partant $DS^2 = SR \times SH$ dans cette supposition, c'est-à-dire, que la tangente sera moyenne proportionelle entre la sécante entiere RS & sa partie extérieure SH. Ce qui doit toujours arriver dans le cercle puisque tous ses diametres sont égaux.

PROPOSITION XXXII.

THÉOREME.

206. *Si deux droites quelconques* AB MN (Fig. 52 53.) *se coupent dans un point* O, *au dedans ou au dehors de l'ellipse, & que par le centre* C, *on tire les diametres* CE CL *paralléles aux sécantes* AB MN; *je dis que l'on aura tou-*

jours cette propor., $AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$, *c'est-à-dire, que les rectangles des parties de deux sécantes quelconques, seront toujours entr'eux comme les quarrés des diametres qui leurs sont paralléles.*

DÉMONSTRATION.

Par le centre C, & le point F milieu de AB, soit mené le diametre CFD au point D origine du diametre CD soit menée la tangente DS paralléle à AB, & terminée en S par le prolongement du diametre CH qui passe par le point O ou se coupent les sécantes $AB\ MN$. Cela posé, puisque la droite AB est coupée en deux également en F, & en deux inégalement en O, on aura *par le lemme fondamental* $AO \times OB = BF^2 - OF^2$ & BF étant une ordonnée au diametre CD, on démontrera comme dans *la proposition précédente*, que son quarré $BF^2 = \frac{CS^2 - CO^2}{CS^2} \times CL^2$ à cause des triangles semblables, $CSD\ COF$, qui donnent $CD : CF :: CS : CO$. Pour avoir OF^2, on se servira des mêmes triangles semblables $CSD\ COF$, qui nous donnent $CS^2 : CO^2 :: DS^2 : OF^2 = \frac{DS^2 \times CO^2}{CS^2}$ Mais *par la proposition précédente* $DS^2 = \frac{CS^2 - CH^2}{CH^2} \times CL^2$, donc $FO^2 = \frac{(CS^2 - CH^2)}{CH^2} \times CL^2 \times \frac{CO^2}{CS^2}$ & retranchant FO^2 de BF^2, il vient

$$BF^2 - FO^2 = \frac{CS^2 - CO^2}{CS^2} \times CL^2 - \frac{(CS^2 - CH^2)}{CH^2} \times CL^2 \times \frac{CO^2}{CS^2}$$

& faisant les multiplications indiquées, on aura

$$BF^2 - FO^2 = \frac{CS^2 \times CL^2}{CS^2} - \frac{CO^2 \times CL^2}{CS^2} - \frac{CS^2 \times CL^2 \times CO^2}{CH^2 \times CS^2} + \frac{CH^2 \times CL^2 \times CO^2}{CH^2 \times CS^2}$$

Mais $-\frac{CO^2 \times CL^2}{CS^2}$ est détruit par

$+\frac{CH^2 \times CL^2 \times CO^2}{CH^2 \times CS^2}$ qui se réduit à la même expression en divisant le numérateur & le dénominateur par CH^2. Et partant $BF^2 - OF^2 = \frac{CS^2 \times CL^2}{CS^2} - \frac{CS^2 \times CL^2 \times CO^2}{CH^2 \times CS^2} = CL^2 - \frac{CL^2 \times CO^2}{CH^2} = \frac{CL^2 \times CH^2 - CL^2 \times CO^2}{CH^2} = \frac{(CH^2 - CO^2)}{CH^2} \times CL^2$ d'où l'on tire $BF^2 - FO^2$ ou $AO \times OB : CH^2 - CO^2$ ou $RO \times OH :: CL^2 : CH^2$.

Et *alternando* $AO \times OB : CL^2 :: RO \times OH : CH^2$.

On fera voir précisément de même que

$MO \times ON : CE^2 :: RO \times OH : CH^2$.

Donc puisque ces deux proportions ont même dernier rapport, on aura

$AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$. *Ce qu'il falloit 1° démontrer.*

2° Si les sécantes AB MN se coupent au dehors de l'ellipse, la démonstration ne changera pas, car on démontrera toujours en suivant le même procéde, que $AO \times OB : CL^2 :: RO \times OH : CH^2$. Toute la différence consiste en ce que l'on auroit $OF^2 - BF^2$ à la place $AO \times OB$ & $CO^2 - CH^2$ à la place de $RO \times OH$, au lieu que ces produits dans le premier cas sont représentés par $BF^2 - OF^2$ & par $CH^2 - CO^2$.

COROLLAIRE I.

207. Si l'on imagine que les sécantes AB MN (Fig. 53.) se meuvent parallélement à elles mêmes, jusqu'à ce qu'elles deviennent tangentes en D & en I, aux extrémités D I des diametres qui les divisent en deux également, dans ce cas le point O se confondra

avec le point T, ou les tangentes IT DT se rencontrent, & les rectangles $AO \times OB$, $MO \times ON$ deviendront les quarrés des tangentes, ce qui donnera
$DT^2 : IT^2 :: CL^2 : CE^2$ & par la présente on a
$CL^2 : CE^2 :: AO \times OB : MO \times ON$.
Donc $DT^2 : IT^2 :: AO \times OB : MO \times ON$, c'est-à-dire que les rectangles des sécantes AB MN, sont entr'eux comme les quarrés des tangentes qui leur sont paralléles; prises depuis leur intersection jusqu'au point d'attouchement. D'où l'on voit que cette propriété convient à l'ellipse comme à la parabole (*num.* 83) & l'on verra par la suite qu'elle est commune à toutes les sections coniques.

COROLLAIRE II.

208. Si les diametres ou les tangentes supposés paralléles aux sécantes sont égaux entr'eux, les droites AB MN se couperont en parties réciproques, soit au dedans soit au dehors de l'ellipse, & comme dans le cercle tous les diametres sont égaux entr'eux, ainsi que les tangentes qui se rencontrent deux à deux; deux sécantes quelconques extérieures ou intérieures doivent s'y couper en parties réciproques. Ensorte que cette proposition renferme la démonstration la plus générale des propriétés du cercle que l'on peut regarder comme une ellipse particuliere dont tous les diametres sont égaux, ou dont les deux foyers sont réunis en un seul.

Corollaire. III.

209. Supposant toujours les diametres CD CI, qui divisent les droites AB MN en deux également, dont les demi parametres soient P p: Puisque l'on a
$AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$, on aura aussi $AO \times OB : MO \times ON :: CD \times P : CI \times p$. Car puisque les diametres CL CE sont paralléles aux sécantes AB MN, ils sont conjugués aux diametres CD CI qui divisent ces droites en deux parties égales & partant $CL^2 = CD \times P$ & $CE^2 = CI \times p$. & comme dans la parabole tous les diametres sont infinis, les produits $AO \times OB$, $MO \times ON$, sont entr'eux comme les parametres des diametres qui divisent ces mêmes sécantes en deux également. (*num.* 82).

Corollaire IV.

210. Si l'une des sécantes AB (Fig. 53.) devient tangente en D, & que l'autre MN prolongée, s'il est nécessaire, la rencontre en o, on aura $Do^2 : Mo \times oN :: CL^2 : CE^2 :: DT^2 : IT^2$ (206). Et si les diametres ou les tangentes paralléles aux sécantes sont égaux entr'eux, la tangente sera moyenne proportionelle entre la sécante entiere & sa partie extérieure, puisque dans ce cas $Do^2 = Mo \times oN$. Ce qui doit toujours arriver dans le cercle, puisque tous ses diametres sont égaux ainsi que les tangentes qui se rencontrent deux à deux.

COROLLAIRE V.

211. Si l'une des sécantes AB, par exemple, est coupée en deux également en F par une sécante dD (Fig. 52) qui passe par le centre, alors le produit $AO \times OB$ deviendra le quarré de AF, le produit $MO \times ON$ deviendra $DF \times Fd$ & le demi diametre paralléle à la sécante sera le demi diametre CD lui-même, & la proportion deviendra celle-ci $AF^2 : FD \times Fd :: CL^2 : CD^2$. C'est-à-dire que le quarré d'une ordonnée est au produit de ses abscisses, comme le quarré d'un diametre paralléle à cette ordonnée est au quarré de celui auquel cette ligne est ordonnée.

REMARQUE.

Cette propriété qui est la principale de l'ellipse, & de laquelle nous sommes partis, devient un corollaire de la présente proposition qui est la plus générale que l'on puisse donner sur cette courbe, & qui renferme sa nature de la maniere, la plus complette. Si notre esprit nous permettoit de nous élever tout d'un coup aux idées les plus générales pour descendre ensuite dans le détail de ce qu'elles renferment au dessous d'elles, on auroit pû définir l'ellipse comme il suit.

L'ellipse est une courbe rentrante, telle que les produits de deux sécantes quelconques terminées à cette courbe, sont entr'eux comme les quarrés de deux lignes paralléles à ces sécantes qui diviseroient chacunes la courbe en deux par

ties égales & que pour cette raison on appelleroit diametres de la courbe. *Mais comme nous ne pouvons saisir les vérités qu'en les détachant pour ainsi dire les unes des autres ; nous sommes obligés de suivre une méthode différente en commençant par des vérités de détail, pour arriver aux plus générales. & comme cette méthode n'est en usage que parce qu'elle est la plus proportionée à la foiblesse de nos organes, & non qu'elle soit en effet la plus belle, il suit que l'on approchera d'autant plus de la méthode vraiment géométrique, que l'on pourra prendre les propositions dans leur plus grande généralité, sans déroger à la clarté nécessaire pour conduire notre raison dans la recherche de la vérité.*

COROLLAIRE VI.

212. Si par un point D pris sur l'ellipse (Fig. 54.) on mene parallélement aux droites AB MN prolongées, s'il est nécessaire, les lignes DF DP qui les coupent aux points K G, on aura $DK \times KF : MK \times KN :: CL^2 : CE^2$. Puisque les droites MN DF, sont paralléles aux diametres CL CE & qu'elles se coupent mutuellement ; on aura de même $AG \times GB : GD \times GP :: CL^2 : CE^2$. Puisque les droites AB PD sont des sécantes paralléles aux diametres CL CE, d'où l'on déduit encore les trois proportions suivantes
$DK \times KF : MK \times KN :: AO \times OB : MO \times ON$
$AG \times GB : GD \times GP :: AO \times OB : MO \times ON$
& $DK \times KF : MK \times KN :: AG \times GB : GD \times GP$.
Ce qui est évident par tout ce qui précéde.

REMARQUE.

On tire de cette Proposition & du dernier Corollaire, la solution de plusieurs Problêmes pour faire passer une Ellipse par plusieurs points donnés dans de certaines conditions, comme si l'on proposoit de trouver une Ellipse qui passât par trois points donnés, & dont un diametre soit égal à une ligne donnée de grandeur, pourvû que ces trois points ne soient pas en ligne droite. On va voir dans le Problême suivant, qui est un des plus compliqués, la manière dont il faudroit s'y prendre pour résoudre ceux qui le seroient moins, par le moyen de la proposition précédente.

PROPOSITION XXXIII.

PROBLÊME.

213. *Etant donnés cinq points AMBND sur un même plan* (Fig. 54.) *non en ligne droite, & qui puissent former une courbe rentrante, toujours concave d'un même côté, trouver une Ellipse qui passe par ces mêmes points.*

SOLUTION.

Ayant joint deux points $A\,B$ par la droite AB, & deux autres points $M\,N$ par la droite MN, par le cinquiéme point D, on menera une droite DK parallèle à AB, & prolongée indéfiniment vers F, puis on fera cette proposition $MO \times ON : AO \times OB :: MK \times KN : DK \times KF$, & ensuite on cherchera une droite $KF = \frac{AO \times OB \times MK \times KN}{MO \times ON \times DK}$, qui donnera sur la ligne DK un point F dé-

terminé, puisque toutes les lignes qui forment le numérateur & le dénominateur de cette fraction sont déterminées de grandeur par la position respective des points *AMBND*. Pareillement pour avoir un point *P* fixé sur la droite *GD*, menée par le point *D* parallélement à la droite *MN*, & qui coupe la droite *AB* au point *G*, on fera cette analogie $AO \times OB : MO \times ON :: GB \times GA : GD \times GP$, & l'on cherchera ensuite une droite $GP = \frac{MO \times ON \times GB \times GA}{AO \times OB \times GD}$. & comme toutes les lignes qui composent la valeur de *GP* sont connues, on pourra aussi connoître *GP*.

Pour trouver après cela le centre de l'Ellipse qui doit passer par les points donnés, par les milieux *QS* des droites *PD*, *MN*, paralléles par construction, on menera une droite indéfinie *RCr*; pareillement par les points *TV*, milieux des deux droites parallèles *AB DF* on menera une autre droite indéfinie *ZTVX*, qui coupera la droite *Rr* dans un point *C* qui sera le centre de l'Ellipse dont les droites *Rr ZX* seront des diametres.

Enfin pour déterminer sur une de ces droites par exemple, sur *RCr* le point *R* ou *r*, qui doit être l'origine de son diametre, on remarquera que les droites *PD MN* étant paralléles entr'elles *par construction*, & coupées également aux points *QS*, seront des doubles ordonnées au diametre *RCr*, & partant on aura (*num.* 193). $MS^2 : PQ^2 :: CR^2 - CS^2 : CR^2 - CQ^2$, d'où l'on tire $CR^2 = \frac{MS^2 \times CQ^2 - PQ^2 \times CS^2}{MS^2 - PQ^2}$

ou $CR = \frac{\sqrt{MS^2 \times CQ^2 - CS^2 \times PQ^2}}{\sqrt{MS^2 - PQ^2}}$ dont on trouveroit aisément la valeur par le moyen du cercle ; ayant ainsi trouvé le diametre CR, dont on a déja l'ordonnée MS, on trouvera facilement son conjugué en faisant cette proposition $CR^2 - CS^2 : MS^2 :: CR^2 : CE^2$, & l'on décriroit ensuite l'Ellipse avec les deux diametres conjugués, comme il sera expliqué au Livre de la description des Sections coniques.

DÉMONSTRATION.

Pour bien concevoir la raison de toutes ces opérations, il suffit de faire attention que les droites FD PD étant paralléles aux droites AB MN, seront aussi paralléles aux diametres CE CL que l'on doit supposer paralléles à ces mêmes droites AB MN, & partant par le corollaire sixième de la proposition précédente, les proportions dont on s'est servi pour déterminer les points FP, doivent avoir lieu. D'ailleurs on voit clairement qu'il n'y avoit dans chacune que la quantité DF ou GP qui fût inconnue & par conséquent les mêmes proportions sont suffisantes pour les déterminer. La manière dont on a trouvé le centre de l'Ellipse n'a pas besoin de démonstration puisque les droites Rr ZX étant des diametres dont les lignes DP MN AB MF sont les doubles ordonnées leur intersection commune est nécessairement le centre de l'Ellipse.

OBSERVATION.

Les Commençans pourroient être embarrassés à déterminer les droites *KF* ou *GP*; mais l'opération qu'il faudroit faire pour cela n'a rien de difficile comme on le va voir. On prendroit une ligne droite *ab* moyenne proportionelle en les droites *AO* & *OB*, on prendra de même une moyenne *cd* entre les droites *MO* & *ON*, & enfin une moyenne *fg* entre *GB* & *GA*, & la proportion $AO \times OB : MO \times ON :: GB \times GA : GD \times GP$ deviendroit celle-ci :

$ab^2 : cd^2 :: fg^2 : GD \times GP$ & tirant les racines $ab : cd :: fg : \sqrt{GD \times GP}$ & cherchant une quatriéme proportionelle aux droites *ab* *cd* *fg*, on auroit une ligne *hl* égale à $\sqrt{GD \times GP}$. D'où l'on auroit $hl^2 = GD \times GP$. Ce qui montre que la question se réduit à trouver une troisiéme proportionelle aux droites *hl* & *GD* qui sont entierement connues. On trouveroit la ligne *KF* précisément de la même maniere.

Si le point *D* (Fig. 55.) est placée de manière que la droite *DG* paralléle à *MN*, tombe sur le prolongement de la ligne *AB*, & que la droite *DK* paralléle à *AB* tombe sur celui de la ligne *MN*, alors au lieu de prendre le point *P* au-delà du point *G* à l'égard de *D*, on le prendra entre les points *DK*; ce qui ne change rien à la solution du problême. Dans ce cas les droites *KD*, *KM*, *GD*, *GA* sont des sécantes extérieures à l'Ellipse qui doit passer

par les points donnés, au lieu que dans la Figure 54, les mêmes lignes sont des sécantes intérieures.

Si le point *M* n'étoit pas au-delà de la ligne *AB*, à l'égard des points *DN*, mais en-deçà comme en *m*; il est clair que l'on ne pourroit point faire passer une Ellipse par les cinq points donnés, mais on pourroit y faire passer une hyperbole. A moins que les diametres qui divisent les droites *AB* *MN* & leurs paralléles *DF* *DP*, en deux également ne se trouvassent paralléles, auquel cas, la courbe qui passeroit par ces points seroit une parabole. Il suit encore de cette position, qu'il ne peut y avoir qu'une section conique qui passe par cinq points donnés. Car les diametres qui divisent les sécantes *AB* *MN* & leurs paralléles en deux également, concourent où ils sont paralléles entr'eux. S'ils concourent, la courbe sera une ellipse en cas que ces points appartiennent à une courbe rentrante toujours concave d'un même côté, & elle sera une hyperbole, lorsque la courbe ne pourra être une courbe rentrante. Enfin dans le second cas, il ne peut y avoir que la parabole qui passe par cinq points donnés: puisque cette courbe est la seule dont les diametres soient paralléles.

Il suit encore de-là que deux sections coniques ne peuvent avoir cinq points communs & par conséquent qu'elles ne peuvent se couper qu'en quatre points.

Au reste comme on n'a pas encore donné

les propriétés de l'hyperbole, il nous suffit de sçavoir en quel cas une ellipse peut passer par cinq points donnés pour montrer l'usage que l'on peut faire des propriétés des sécantes intérieures & extérieures.

PROPOSITION XXXIV.

THÉOREME.

214. *Si par un point* D *extrémité d'un diametre quelconque* CD (Fig. 56.), *on mene une tangente* DS *terminée en* S *par le prolongement d'un autre diametre* CH *& une ordonnée* DG *au même diametre* CH ; *je dis que l'on aura* CG:CH::CH:CS. *C'est-à-dire que la soutangente* CS *prise sur le diametre* CH *sera troisiéme proportionelle à l'abscisse* CG *& au diametre* CH.

DÉMONSTRATION.

Du point *H* soit menée l'ordonnée *HK* au diametre *CD*, & la tangente *HP* paralléle à la droite *GD*, qui coupera la tangente *DS* en *P*. Imaginons de plus que cette même tangente *HP* est prolongée jusquà ce qu'elle rencontre le diametre *CD* aussi prolongé en *Q*. Enfin soient prolongées les ordonnées *HK DG* jusqu'à ce qu'elles rencontrent de nouveau l'ellipse en *h* & *d* : puisque ces droites *Dd Hh* sont des doubles ordonnées aux diametres *CH CD*, chacune d'elles sera coupée en deux parties égales aux points *G K* & elles se couperont réciproquement en parties

inégales au point O ; cela posé, *par le lemme fondamental* $DO \times Od = DG^2 - GO^2$ & $OH \times Oh = HK^2 - OK^2$ & supposant encore les demi-diametres CM CL paralléles aux sécantes Dd Hh, on aura *par la proposition précédente*

$DO \times Od : HO \times Oh :: CM^2 : CL^2 :: PH^2 : PD^2$ (*num.* 206). Mais à cause du parallélogramme $PODH$, $PH = DO$ & $PD = OH$, donc on aura $DO \times Od : HO \times Oh :: DO^2 : OH^2$ d'où l'on déduit en divisant les deux antécédents par DO, & les deux conséquents par OH,

$$Od : Oh :: DO : OH, \text{ ou}$$

$DG + OG : HK + OK :: DO : OH$. Mais on a $DG^2 - OG^2 : HK^2 - OK^2 :: DO^2 : OH^2$. Donc en divisant ces deux proportions par ordre, on aura

$$\frac{DG^2 - CG^2}{DG + OG} : \frac{HK^2 - OK^2}{HK + CK} :: \frac{DO^2}{DO} : \frac{OH^2}{OH} \text{ ou}$$

$DG - OG : HK - OK :: DO : OH$. On aura donc $DG + OG : DG - OG :: HK + OK : HK - OK$ puisque nous avons deux proportions qui ont le même dernier rapport $DO : OH$.

Et *dividendo*

$DG + OG - DG + OG : DG + OG :: HK + OK - HK + OK : HK + OK$.

Réduisant & alternant

$2OG : 2OK :: DG + OC : HK + KO :: DO : OH$.

Et enfin prenant la moitié des deux termes

$$OG : OK :: OD : OH.$$

D'où il suit que les triangles GOH DOK sont égaux puisqu'ils ont un angle égal en O compris entre les côtés réciproques OG OH, OD KO. Donc en leur ajoûtant le triangle DOH, les nouveaux triangles DGH DKH

seront encore égaux, & comme ils ont une base commune DH, les droites GK DH qui les comprennent seront paralléles & les triangles semblables CKG, CDH donneront $CG:CH::CK:CD$ & à cause des triangles CKH CDS aussi semblables,
on aura $CK:CD::CH:CS$ donc $CG:CH::CH:CS$. *Ce qu'il falloit démont.*

Corollaire I.

215. Puisque les droites GK DH sont paralléles ainsi que les droites GD QH, les triangles semblables CKG CDH CGD CQH; donneront $CK:CD::CG:CH$
$CG:CH::CD:CQ$
donc on aura aussi $CK:CD::GD:CQ$. Ce qui montre que la droite CQ comprise entre le centre C & la rencontre Q du diametre CD par la tangente HQ est troisiéme proportionelle à l'abscisse CK de l'ordonnée menée du point touchant H au diametre CD & au même demi-diametre.

Corollaire II.

216. Puisque *par le corollaire précédent* $CK:CD::CD:CQ$ on a aussi $CD:CQ::CK:CD$ & à cause des paralléles GK DH
$CK:CD::CG:CH$ & *par la présente proposition.* $CG:CH::CH:CS$, on aura donc $CD:CQ::CH:CS$. D'où il suit que les triangles CDS CHQ, sont égaux, puisqu'ils

puisqu'ils ont un angle égal entre les côtés réciproques, *CD CS*, *CQ CH*, & que les droites *DH QS* sont paralléles.

Corollaire III.

217. Puisque $CG:CH::CH:CS$: on aura *componendo* $CG+CH:CG::CH+CS:CH$ & *alternando* $CG+CH:CH+CS::CG:CH$ de même *divid.* $CH-CG:CH::CS-CH:CH$ & *alternando* $CH-CG:CS-CH::CG:CH$ Donc $CG+CH:CH+CS::CH-CG:CS-CH$ & *réduisant* $RG:RS::GH:SH$; ce qui montre que la ligne *RS* est coupée en proportion harmonique aux points *G H*, on feroit voir de même que $FK:FQ::DK:DQ$, d'où il suit qu'en général les propriétés des diametres par rapport à leurs ordonnées, à leurs parametres & à leurs tangentes & sou-tangentes sont précisément les mêmes que celles des axes par rapport aux mêmes lignes.

Remarque.

On fait usage de cette proposition pour mener une ou deux tangentes à l'ellipse d'un point Q *donné sur le même plan hors de cette courbe comme on va voir dans le probléme suivant.*

Proposition XXXV.

Probléme III

218. *Une ellipse* AFBD (Fig. 57), *son centre* C, *& un point* Q *sur le même plan étant donnés hors de cette courbe, mener de ce point deux tangentes à l'ellipse.*

SOLUTION.

Par le centre C & le point Q, je mene un diametre QCF, sur le diametre FD je décris un demi cercle FPD, sur la partie CQ, je décris de même un autre demi cercle CPQ, qui coupe le premier au point P, duquel j'abaisse la perpendiculaire PK sur le diametre FD, & je mene aux points QC les droites PQ PC. Il est clair que la droite PQ sera tangente au cercle FPD au point P, puisque l'angle CPQ est, *par construction*, appuyé sur le diametre CQ. donc à cause de la perpendiculaire PK ordonnée au diametre FD, du cercle FPD on aura $CK:CD::CD:DQ$, & partant le point K est celui par lequel on doit mener l'ordonnée dont les extrémités détermineront les points de contingence demandés. Il ne s'agit que de trouver l'angle CKH que que doit faire une ordonnée de l'ellipse au diametre FD, avec ce même diametre. On le trouvera de cette maniere. Par un point A pris à volonté sur la circonférence de l'ellipse & le point F origine du diametre FD, on menera une droite indéfinie AFG, sur laquelle on prendra une partie $FG=AF$ par le point G, on menera la droite GB paralléle au diametre FD qui rencontrera l'ellipse dans un point B, par lequel & par le point A on tirera la droite AB qui sera ordonnée au diametre FD qui la divise en deux également en E, comme il est évident à cause des triangles

AEF ABG qui sont semblables, puisque la droite BG est, *par construction*, paralléle à FD, & qui donnent $AF:AG::AE:AB$. Mais AF n'est que la moitié de AG, donc AE n'est aussi que la moitié de AB. L'angle des ordonnées étant ainsi trouvé, par le point K du diametre FD, on menera la droite HKh, paralléle à AB; par les points H h & le point Q on menera les droites QH Qh, qui seront tangentes dans ces points; puisque, *par construction*, la sou-tangente CQ est troisiéme proportionelle à l'abscisse CK & au diametre GD, & que d'ailleurs ces lignes se terminent aux extrémités de la double ordonnée Hh qui passe par le point K. *Ce qu'il falloit trouver & démontrer.*

Corollaire.

219. Il suit de cette construction que si l'on décrit un demi-cercle, & une ellipse sur un même diametre FD, & que par un point K pris sur un diametre commun au cercle & à l'ellipse, on mene une ordonnée au même cercle & une autre à l'ellipse; les tangentes de ces deux courbes, qui passeront par les extrémités de ces ordonnées, se rèuniront dans un même point, sur le prolongement du diametre commun. De plus si l'on décrit une infinité d'ellipses différentes sur un même diametre, & que par un point K on mene à toutes ces ellipses des ordonnées correspondantes; toutes les lignes tangentes aux extrémités de ces or-

données se réuniront au même point sur le diametre commun prolongé autant qu'il sera nécessaire.

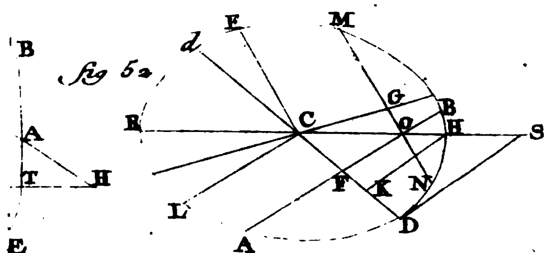
PROPOSITION XXXVI.

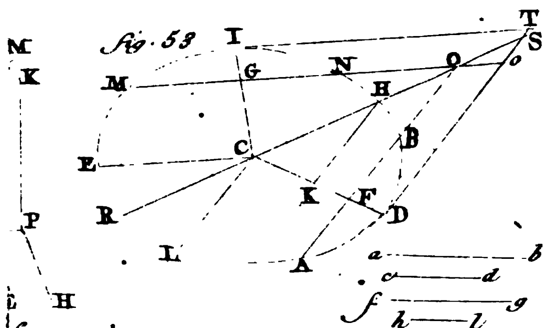
THÉOREME.

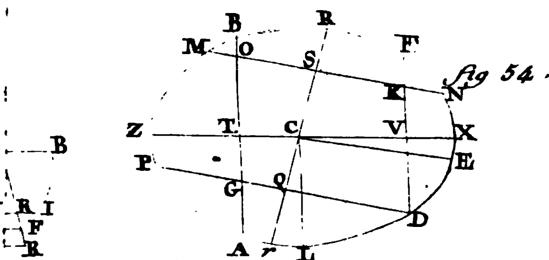
220, *Un parallélogramme* CMmH (Fig. 56) *fait sur deux demi-diametres conjugués* CM CH. *est egal à un parallelogramme* CLID *fait sur deux autres demi-diametres conjugués* CL CD.

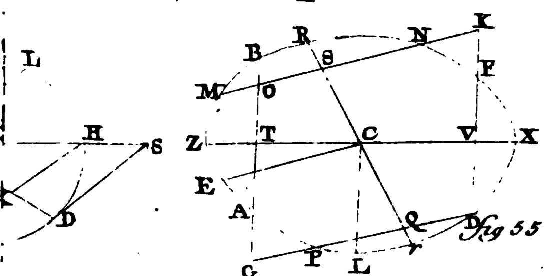
DÉMONSTRATION.

Soient prolongés les diametres *CD CH*, jusqu'à ce qu'ils rencontrent les tangentes *HQ DS* aux points *S Q*, soient achevés les parallélogrammes *CDSs CHQq*, sur les diametres *CD CH*, & leurs tangentes *DS QH*, par le point *L* soit mené la tangente *Ll*, parallele à *CD*, terminée en *l* à la tangente *DS*, & par le point *M* la tangente *Mm* parallele au diametre *CH*, & terminée en *m* à la tangente *HQ*. *Par la proposition* 31[eme] on aura $DS^2 : CS^2 - CH^2 :: CL^2 : CH^2$, & partant $DS^2 = \frac{(CS^2 - CH^2)}{CH^2} \times CL^2$. *Par la même proposition*, on aura encore $QH^2 : CQ^2 - CD^2 :: CM^2 : CD^2$, & partant $QH^2 = \frac{(CQ^2 - CD^2)}{CD^2} \times CM^2$, & à cause des droites *DH QS* qui sont paralléles (*num.* 215). on a $CQ^2 : CD^2 :: CS^2 : CH^2$.
Donc *dividen.* $CQ^2 - CD^2 : GD^2 :: CS^2 - CH^2 : CH^2$, ou, ce qui revient au même, $\frac{CQ^2 - CD^2}{CD^2} = \frac{CS^2 - CH^2}{CH^2}$. Si l'on fait une proportion avec les quarrés DS^2 QH^2, & leurs valeurs, on aura


fig 52
d
E
M
B
A
T
H
E
R
C
G
B
O
H
S
L
F
K
N
A
D


fig. 53
M
K
P
H
I
T
S
G
N
O
o
M
H
C
B
E
R
K
F
D
L
A
a
b
c
d
f
g
h
l


B
R
M
O
S
F
fig 54.
K
N
Z
T
C
V
X
P
E
G
Q
D
A
r
L
B
R
I
F
E


L
R
N
K
B
S
F
M
O
Z
T
C
V
X
H
S
E
A
D
Q
D
fig 55
r
G
P
L

$DS^2 : QH^2 :: \frac{(CS^2 - CH^2)}{CH^2} \times CL^2 : \frac{(CQ^2 - CD^2)}{CD^2} \times CM^2 ::$ $CL^2 : CM^2$, en diviſant par les rapports égaux qui multiplient CL^2 & CM^2. Donc en tirant les racines $DS : QH :: CL : CM :: Dl : Hm$. Car à cauſe des parallélogrammes DL HM, $Dl = CL$ & $CM = Hm$. Donc *alternando* $DS : Dl :: QH : Hm$.

Cela poſé les parallélogrammes $CHmH$ $CHQq$ étant compris entre les paralléles QH qC, on aura $CHQq : CHmM :: QH : Hm$ & nous avons $QH : Hm :: DS : Dl$ & à cauſe des parallélogrammes $CDlL$ $CDSs$ $DS : Dl :: CDSs : CDlL$. Donc $CHQq : CHmM :: CDSs : CDlL$. Mais (*num.* 216) $CQH = CDS$. Donc $CHQq = CDSs$, puiſque les pararllélogrammes ſont doubles de triangles égaux. Donc auſſi $CHmM = CDlL$; C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

221. Puiſqu'un parallélogramme fait ſur deux demi-diametres conjugués, eſt égal à un autre parallélogramme fait ſur deux autres demi-diametres conjugués, les parallélogrammes faits ſur les diametres entiers, ſeront auſſi égaux entr'eux puiſqu'ils ſont quadruples des premiers. D'où il ſuit que tous les parallélogrammes circonſcripts à l'ellipſe, & formés ſur deux diametres conjugués, ſont égaux entr'eux & au rectangle des deux axes.

COROLLAIRE II.

222. Puiſque par la propoſition & le corol-

laire précédent, un parallélogramme *LCDH* (Fig. 58), formé sur deux demi-diametres conjugués quelconques *CD CL*, est égal au rectangle des deux demi-axes *CA CB* de la même ellipse; si par le point *L*, extrémité du diametre *CL* on abaisse la droite *LF* perpendiculaire à son conjugué *CD*, on aura $CD \times FL = CA \times CB$, car puisque le premier parallélogramme est obli-quangle, il est égal au produit de sa base *CD* par sa hauteur *LF*, d'ou l'on tire $CD : CA :: CB : FL$.

PROPOSITION XXXVII.

Théorême.

223. *Soit une ellipse* PTB *dont* CT CB (fig. 59) *sont les deux demi-axes, &* CP CQ *deux demi-diametres conjugués l'un à l'autre, si des points* P Q *extrémités de ces diametres, on mene les ordonnées à l'axe* PO QR, *je dis que la somme des quarrés des abscisses* CO CR *est égal au quarré du demi-axe* CT *auquel on a mené ces ordonnées. C'est-à-dire que l'on aura toujours* $CO^2 + CR^2 = CT^2$.

Démonstration.

Du point *P* origine du diametre *CP*, soit menée la tangente *PH*, parallele à son conjugué CQ, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe en *H*, puisque les droites *PO QR* sont ordonnées à l'axe *CT*, on aura
$PO^2 : QR^2 :: CT^2 - CO^2 : CT^2 - CR^2$, & à cau-

se des triangles semblables $POH\ QRC$, $QR^2 : PO^2 :: CR^2 : OH^2$. donc en multipliant par ordre on aura

$$PO^2 \times QR^2 : PO^2 \times QR^2 :: (CT^2 - CO^2) \times CR^2 : (CT^2 - CR^2) \times OH^2$$

Mais les deux premiers termes de cette proportion sont égaux, donc les deux derniers le sont aussi ; ce qui donne cette égalité

$$CT^2 \times CR^2 - CO^2 \times CR^2 = CT^2 \times OH^2 - CR^2 \times OH^2.$$

D'ou l'on déduit $CR^2 = \frac{CT^2 \times OH^2}{CT^2 - CO^2 + OH^2}$. Mais (N° 163) $OH = \frac{CT^2 - CO^2}{CO}$ Donc $OH^2 = \frac{(CT^2 - CO^2) \times (CT^2 - CO^2)}{CO^2}$ mettant cette valeur de OH^2 dans celle de CR^2, il viendra

$$CR^2 = \frac{\frac{CT^2 \times (CT^2 - CO^2) \times (CT^2 - CO^2)}{CO^2}}{\frac{(CT^2 - CO^2) \times CO^2 + (CT^2 - CO^2) \times (CT^2 - PO^2)}{CO^2}}$$

ou en divisant le numérateur & le dénominateur par $CT^2 - CO^2$ & multipliant l'un & l'autre par CO^2.

$$CR^2 = \frac{CT^2 \times (CT^2 - CO^2)}{CO^2 + CT^2 - CO^2} = \frac{CT^2 \times (CT^2 - CO^2)}{CT^2} = CT^2 - CO^2$$

& faisant passer CO^2 dans le premier membre, $CR^2 + CO^2 = CT^2$. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

Cette proposition est générale, c'est-à-dire, que si des extrémités de deux demi-diametres conjugués quelconques CP CQ, *on mene des ordonnées* PO QR *à un diametre quelconque* CT, *on aura toujours* $CR^2 + CO^2 = CT^2$. *Car les triangles* POH, & QRC *seront toujours semblables, & comme les propriétés des sou-tangentes prises sur un diametre quelconque sont les mêmes que celle de l'axe, on aura encore* $OH = \frac{CT^2 - CO^2}{CO}$.

COROLLAIRE. I.

223. Si des points P Q, on abaisse les ordonnées PM QN, perpendiculaires au petit axe, on aura $CM^2+CN^2=CB^2$. Mais à cause des parallélogrammes OM RN, $CM=PO$ & $CN=QR$.

Donc $CM^2+CN^2=PO^2+QR^2=CB^2$.

C'est-à-dire que si des extrémités PQ de deux diametres conjugués, on mene les ordonnées PO QR au grand axe la somme des quarrés de ces ordonnées sera égale au quarré du second axe. Ce corollaire est encore vrai, si l'on suppose que l'axe CT soit un diametre auquel on ait mené des ordonnées PO QR paralléles à son conjugué. Dans la présente proposition au lieu des abscisses CO CR on auroit pu prendre leurs paralléles PM QN qui leur sont égales, d'où l'on déduit cette propriété générale de l'ellipse. *Si des extremités de deux diametres quelconques, conjugués l'un à l'autre, on mene des ordonnées à un troisiéme diametre qui passe entre les deux premiers la somme des quarrés de ces ordonnées sera égale au quarré du demi-diametre paralléle à ces ordonnées, & conjugué à ce troisiéme diametre.*

COROLLAIRE. II.

224. Il suit encore de cette proposition que la somme des quarrés de deux diametres conjugués quelconques, est égale à celle des quarrés des deux axes, ou de deux autres diametres

conjugués l'un à l'autre. Car on a *par la propos. présen*, $CT^2 = CO^2 + CR^2$, & $CB^2 = PO^2 + QR^2$ Donc $CT^2 + CB^2 = CO^2 + PO^2 + CR^2 + QR^2$, en ajoutant ces deux équations, mais à cause du triangle rectangle COP, $CO^2 + PO^2 = CP^2$, & à cause du triangle rectangle CQR $CR^2 + QR^2 = CQ^2$. Donc $CT^2 + CB^2 = CP^2 + CQ^2$ & comme les quarrés des diametres sont quadruples de ceux des demi-diametres, on en conclura que la somme des quarrés de deux diametres conjugués, est égale à celles des quarrés des deux axes.

Corollaire III,

225. Supposant toujours que CT est un diametre quelconque différent de l'axe, & que CB lui est conjugué, il suit de la proposition présente que l'on aura toujours $CO \times PO = CR \times QR$ c'est-à-dire que, *si des extremites de deux diametres conjugués* CP CQ, *on mene à un diametre quelconque* CT *des ordonnées* PO QR, *le produit d'une ordonnée, par son abscisse sera égal au produit d'une autre ordonnée par son abscisse, ou, ce qui revient au même, que ces ordonnées seront entr'elles réciproquement comme leurs abscisses.* Car puisque, *par la proposition présente*, on a $CT^2 = CO^2 + CR^2$, on aura $CT^2 - CO^2 = CR^2$. Et parce que les droites PO PQ, sont ordonnées à un même diametre CT, on aura $PO^2 : QR^2 :: CT^2 - CO^2 : CT^2 - CR^2 = CT^2 - CT^2 + CO^2 = CO^2$, en mettant $CT^2 - CO^2$

à la place de CR^2. D'où il vient

$PO^2 : QR^2 :: CT^2 - CO^2 : CO^2$. Donc en prenant le produit des extrêmes & des moyens $PO^2 \times CO^2 = QR^2 \times (CT^2 - CO^2) = QR^2 \times CR^2$. Puisque $CT^2 - CO^2 = CR^2$, comme on vient de le voir. Donc en tirant les racines $PO \times CO = QR \times CR$, qui est précisément ce que l'on avoit annoncé, puisque de cette égalité on peut déduire cette proportion $PO : QR :: CR : CO$.

Les triangles *COP CRQ* seront toujours égaux, soit que les diametres conjugués soient égaux, soit qu'ils soient inégaux. Car ces triangles auront toujours un angle égal, ou des angles suppléments l'un de l'autre compris entre côtés réciproques.

PROPOSITION XXXVIII.

Théorème.

226. *Si par l'extrémité* P *d'un diametre* CP *on mene une tangente* hPH *terminée en* H *&* h, *aux prolongements de deux diametres conjugués* CT Cb, *en supposant le demi diametre* CQ *parallele à la tangente en* P ; *je dis que l'on aura* $PH \times Ph = CQ^2$. *C'est-à-dire que le rectangle des parties d'une tangente terminée à deux diametres conjugués, prise depuis le point touchant ; est égal au quarré du demi diametre parallele à cette tangente, ou, si l'on veut, au quarré du demi diametre conjugué à celui par l'extrémité duquel on a mené la tangente.* (Fig. 59.)

DÉMONSTRATION.

Du point P extrémité du diametre CP, soient menées les droites PM PO ordonnées aux diametres conjugués CT Cb, & du point Q extrémité du diametre CQ paralléle à la tangente en P, l'ordonnée QR au diametre CT, les triangles POH QRC hMP seront évidemment semblables, puisque les droites PO QR PH QC sont paralléles, par construction, & donneront.

$\left(\begin{array}{l} PH:OH::CQ:CR \\ Ph:PM::CQ:CR \end{array}\right)$ donc en multi. par ord. & mettant CO à la place de PM qui lui est égal, on aura

$PH \times Ph \cdot OH \times CO :: CQ^2 : CR^2 = CT^2 - CO^2$. *par l'article* 225 & à cause de la tangente PH on a $OH = \frac{CT^2 - CO^2}{CO}$ donc $OH \times CO = CT^2 - CO^2$, d'où il suit évidemment que $PH \times Ph = CQ^2$. Car la proportion se change en celle-ci $PH \times Ph : CT^2 - CO^2 :: CQ^2 : CT^2 - CO^2$. C. Q. F. D.

Cette proposition est d'un grand secours pour la solution de plusieurs problêmes curieux sur la description des sections coniques. On en va voir une application dans le problême suivant.

PROPOSITION XXXIX.

PROBLÊME IV.

227. *Deux lignes* CP CQ *étant données de grandeur & de position pour deux demi diametres conjugués d'une ellipse; il faut en trouver les deux axes* (Fig. 60).

SOLUTION.

On fera d'abord cette proportion $CP:CQ::CQ:PS$ par le point P on menera la droite PH paralléle à CQ & au point F milieu de CS, on élevera la perpendiculaire FD qui rencontrera PH dans un point D. De ce point comme centre avec le rayon DC, on décrira un cercle qui coupera la ligne Ph dans les points déterminés H & h. De ces points on menera au centre C les droites CH Ch, qui se couperont à angles droits & sur lesquels doivent se trouver les axes demandés. Pour les déterminer, du point P on abaissera les perpendiculaires PO PM, qui seront ordonnées à ces axes, & l'on aura le premier en cherchant une ligne CT moyenne proportionelle entre CO & CH, & le second en cherchant pareillement une moyenne CB entre CM & Ch.

DÉMONSTRATION.

Puisque la droite PH est paralléle au diametre CQ, elle est tangente en P. D'ailleurs cette droite hPH étant comprise dans le cercle dont elle est un diametre, à cause de la sécante CS on aura $Ph \times PH = CP \times PS$. Mais par construction nous avons $CP:CQ::CQ:PS$. Donc $CP \times PS$ ou $PH \times Ph = CQ^2$. Ce qui fait voir que cette tangente est terminée de part & d'autre par le prolongement de deux diametres conjugués. Et comme il n'y a que

les axes qui se coupent à angles droits dans l'ellipse, il faut aussi que ces axes se trouvent sur les droites CH & Ch, puisque l'angle C est droit étant appuyé sur le diametre. Enfin, puisque CT est moyenne proportionelle entre CO & CH, on aura $CO:CT::CT:CH$, ce qui montre que le point T est l'origine de l'axe. Ainsi cette construction fait trouver tout ce que l'on demandoit.

REMARQUE.

On pourroit aussi par le moyen de la même proposition, trouver deux diametres qui fissent entr'eux un angle égal à un angle donné, étant données deux lignes droites CP CQ *pour deux demi-diametres conjugués déterminés de grandeur & de position. La droite* CS *seroit toujours la même ; mais la droite* hH *deviendroit en ce cas la corde de l'angle que doivent faire entr'eux les deux diametres conjugués que l'on demande. Ceux qui sçavent tant soit peu l'application de l'algèbre à la géométrie, pourront s'exercer à trouver la solution de ce Problême que l'on trouvera du second degré.*

PROPOSITION XL.

THÉORÊME.

227. *Soit une ellipse* aBAb (Fig. 61), *dont* aA bB *sont deux diametres conjugués ; si l'on décrit un démi-cercle* aMmA *sur l'un de ces diametres, & si par un point* P *quelconque, du diametre sur lequel on a décrit le demi-cercle, on*

mene une ordonnée PM *au cercle, & une autre ordonnée* PN *à l'ellipse, parallele au diametre conjugué* Bb, *je dis que l'ordonnée à l'ellipse sera toujours à son ordonnée correspondante au cercle, comme le demi-diametre* CB *est au demi-diametre* CA, *sur lequel le cercle a été décrit.*

DÉMONSTRATION.

Puisque la droite PN est ordonnée au diametre CA de l'ellipse CA, par la prop. 27[eme], on aura $PN^2 : aP \times PA :: CB^2 : CA^2$, & puisque PM est ordonnée au cercle, on aura $PM^2 = aP \times PA$. Donc en substituant cette expression à la place du rectangle $aP \times PA$, on aura $PN^2 : PM^2 :: CB^2 : CA^2$, & tirant les racines de chaque terme

$$PN : PM :: CB : CA. \quad C. Q. F. D.$$

COROLLAIRE.

228. Si les deux diametres de l'ellipse conjugués l'un à l'autre sont égaux entr'eux, les ordonnées de l'ellipse, seront égales aux ordonnées correspondantes dans le cercle, d'où il suit que pour qu'une figure soit un cercle; il ne suffit pas que les quarrés des ordonnées soient égaux aux quarrés des abscisses, mais il faut encore que ces ordonnées fassent angle droit avec leur diametre. On tire de cette proposition une méthode fort simple de décrire une ellipse, dont les diametres conjugués sont égaux & font entr'eux un angle déterminé, comme on verra dans la description des Sections Coniques.

OBSERVATION.

Nous avons consideré jusqu'ici l'ellipse, indépendamment des rapports qu'elle peut avoir avec le cercle, & la plûpart des démonstrations que nous avons données, étoient appuyés sur les propriétés de cette courbe considerée dans elle même. De ces propriétés démontrées généralement, nous avons déduites celles du cercle par des corollaires & des suites immédiates de ces propositions. Peut-être cette méthode paroitra-t-elle un peu difficile & recherchée, d'autant que l'on auroit pû démontrer toutes ces propriétésd'une maniere plus courte, en considerant l'ellipse comme un cercle dont les ordonnées ont été allongées ou accourcies proportionellement, comme a fait Grégoire de *St.* Vincent *dans son traité des Sections Coniques. Deux raisons m'ont engagé à suivre une route différente : quoiqu'un peu plus difficile. La premiére, c'est qu'ayant résolu de donner en entier dans cet ouvrage, le petit traité des sections coniques de* M. dela Hire ; *il étoit plus naturel de donner les démonstrations générales des propositions précédentes, en se servant des mêmes principes, que d'employer une autre méthode qui n'auroit eu aucune liaison avec la premiere. La seconde, & qui peut être la plus forte, est qu'enfait de géométrie, il faut donner les démonstrations les plus générales qu'il est possible. Or on ne peut disconvenir que l'ellipse ne soit une courbe plus générale que le cercle qu'elle renferme dans ses différentes espéces. On peut déduire le cercle de l'ellipse en simplifiant les rapports d'où l'on tire son équation, & l'on ne peut pas de même déduire*

l'ellipse du cercle. Je ne suis pas assez téméraire pour blâmer en aucune maniere, ceux qui ont suivi la méthode inverse, & peut être doit elle être préférée, puisqu'elle est la plus proportionnée à la méthode de doctrine, qui procede toujours du plus simple au plus composé, & que d'ailleurs dans un traité synthétique, on est absolument obligé de considerer le rapport de l'ellipse au cercle pour estimer sa surface avec précision & pour toiser les solides formés par la révolution des ellipses, des segments ou secteurs elliptiques, autour d'un axe de mouvement. Comme cette partie n'a pas été traitée dans le livre des éléments de M. de la Hire, *j'ai crû que tout le monde la verroit ici avec plaisir, & qu'il n'y auroit aucun inconvénient à suivre une route un peu différente de celle que j'ai tenue dans les propositions précédentes, en commençant toujours par les propositions qui me paroitront les plus générales, quoique cette méthode ait quelque chose de moins universel que la précédente.*

PROPOSITION XLI.

Théorême.

229. *La surface d'une ellipse* aBAb, *dont* aA Bb *sont deux diametres conjugués, est à la surface d'un cercle décrit sur l'un de ces diametres, comme le parallelogramme formé sur les deux diametres, est au quarré du diametre sur lequel ce cercle a été décrit.* (Figure 61).

Démonstration.

Par le point *A* extrémité du diametre *Aa*, soit

soit menée la ligne AD, paralléle au diametre conjugué Bb, & tangente à l'ellipse en ce point, du centre C & rayon CA soit décrit un cercle $AmMa$, & du même centre soit abaissée la droite CD perpendiculaire sur la tangente AD, enfin par deux points infiniments proches Pp, soient menées les ordonnées PN np, dans l'ellipse, & les ordonnées PM pm dans l'el-dans le cercle. Cela posé, puisque ces ordonnées que j'appellerai ordonnées correspondantes, sont infiniment proches, on pourra regarder les petits trapeses PNn p $PMmp$, comme des parallélogrammes puisque les triangles Non Mom qu'il faudroit retrancher ou ajouter pour les rendre de vrais parallélogrammes, sont infiniment petits, par rapport à ces trapeses, & partant de nulle considération. De plus on imaginera que la surface de l'ellipse est composée d'une infinité de petits parallélogrammes ou trapeses $NPpn$, & le cercle d'une infinité de petits rectangle $MPpm$ tous posés à côtés les uns des autres. Nous nommerons les premiers *éléments elliptiques*, & les seconds *éléments circulaires*: & les deux ensemble *éléments correspondants*. Comme les ordonnées MP mp du cercle sont perpendiculaires au demi-diametre CA, le petit rectangle $MPpm$, est égal au produit de sa base Pp, par sa hauteur PM, & l'on aura $PMmp = PM \times pP$; mais il n'en est pas de même de l'élément elliptique correspondant $npPN$; comme les ordonnées PN, pn sont inclinées au diametre CA, pour avoir la surface de l'élément $PNnp$,

il faudra multiplier la base PN par la partie Ll de la droite CD perpendiculaire à la tangente AD, car cette ligne sera aussi perpendiculaire aux ordonnées $PNpn$ paralléles à cette tangente. Ainsi l'on aura $NPpn = PN \times Ll$, faisant donc une proportion avec ces élémens, & les produits qui leurs sont égaux, on aura

$$NPpn : MPpm :: PN \times Ll : PM \times Pp.$$

Mais à cause des paralléles PL pl AD, qui coupent les côtés CA CD en parties proportionelles, on a

$Ll : Pp :: CD : CA$, *& par la proposition* 40. $PN : PM :: CB : CA$, donc *en multipliant par ordre* $PN \times Ll : PM \times Pp :: CD \times CB : CA^2$ donc on aura $NPpn : MPpm :: CD \times CB : CA^2$, c'est-à-dire que l'élément elliptique est à l'élément circulaire, comme le rectangle $CD \times CB$ est au quarré du demi-diametre CA. On démontrera la même chose de tous les élémens correspondants de l'ellipse & du cercle, & partant, *la somme des élémens elliptiques, ou la surface de l'ellipse, est à la somme des éléments circulaires ou à la surface du cercle; comme un élément elliptique, est à l'élément circulaire correspondant, ou comme le rectangle* CD×CB *est au quarré du demi-diametre* CA: mais le rectangle $CD \times CB$ est égal au parallélogramme formé sur les deux demi-diametres conjugués, donc en désignant la surface de l'ellipse par *S ellip.* & celle du cercle par *S cir.* on aura

$$S\,Ellip. : S\,cir. :: CB \times CD : CA^2 :: 4CB \times CD : 4CA^2$$

C'est-à-dire que la surface de l'ellipse, est à la

surface du cercle décrit sur un de ses diametres, comme le parallélogramme formé sur ce diametre & son conjugué, est au quarré de ce diametre. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

230. Le parallélogramme formé sur les deux demi-diametres conjugués CA CB, ou le rectangle $CB \times CD$ est aussi égal au rectangle $CA \times BF$, en supposant la ligne BF abaissée perpendiculairement de l'extrémite B du demi-diametre CB sur son conjugué, donc en mettant $CA \times BF$ dans la derniere proportion de la proposition précédente, on aura
S *ellip.* : S *cir.* $:: CA \times BF : CA^2 :: BF : CA$, en divisant les deux termes du second rapport par CA. D'où il suit que la *surface de l'ellipse, est à la surface d'un cercle décrit sur un diametre quelconque de cette courbe; comme la perpendiculaire abaissée de l'extrémité du diametre* CB *conjugué à celui sur lequel on a décrit le cercle, est au demi-diametre* CA *rayon du même cercle.*

COROLLAIRE II.

231. Si l'on prend une droite RS moyenne proportionelle entre le demi-diametre CA & la droite BF abaissée de l'extrémité de son conjugué perpendiculairement sur lui même, la surface du cercle décrit du rayon RS sera égal à la surface de l'ellipse. Car puisque *par hypothese* on a $CA : RS :: RS : BF$, on aura aussi $CA^2 : RS^2 :: CA : BF$, donc *permutando*

$RS^2 : CA^2 :: BF : CA$ mais par le corollaire précédent $BF : CA ::$ *S. ellip.* : *S cir.* donc $RS^2 : CA^2 ::$ *S. ellip.* : *S. cir.* & prenant les cercles décrits sur les rayons *RS CA* qui sont proportionels aux quarrés de ces lignes, on aura en les désignant ainsi *cer. CA* pour dire le cercle fait sur *CA*,

cer. RS : *cer. S. CA* :: *S. ellip. S. cir.*

d'ailleurs la surface circulaire à laquelle nous comparons l'ellipse est celle d'un cercle qui a *CA* pour rayon, puisqu'on a supposé le cercle décrit sur *CA*, on aura donc le cercle fait sur *RS* égal à la surface de l'ellipse, puisque les conséquents de la derniere proportion sont égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

232. Si les diametres *CA CB* sont perpendiculaires l'un à l'autre, la perpendiculaire *BF* se confondra avec le diametre *CB*, les lignes *aA Bb* deviendront les axes de l'éllipse & la proportion de l'article précédent deviendra celle-ci : *S. ellip. S. cir* :: *BC* : *CA*, c'est-à-dire *que la surface de l'ellipse, est à celle d'un cercle décrit sur son grand ou sur son petit axe, comme le petit axe est au grand axe, ou comme le grand axe est au petit axe.* D'où il suit encore que la surface de l'ellipse est égale à celle d'un cercle dont le rayon seroit moyen proportionel entre les deux axes de l'ellipse. *Ce corollaire est de la dernière importance dans le toisé des surfaces elliptiques, car on ne cherche presque jamais cette surface*

par les diametres conjugués, mais bien par les axes que l'on regarde toujours comme les lignes les plus intéressantes, & que l'on détermine préférablement à tout autre diametre, à moins que l'on ait deux diamétres déja donnés de grandeur & de positions.

Corollaire IV.

233. Supposant toujours l'ellipse dont CA & CB sont deux demi-diametres conjugués, avec le cercle décrit du rayon CA, Fig. 72. si par un point P quelconque du diametre CA, on mene une double ordonnée NPn dans l'ellipse & par le même point sa correspondante MPm dans le cercle, le *segment elliptique NAn sera au segment circulaire MPm, comme BF est à CA, c'est-à-dire comme la perpendiculaire abaissée de l'extrémité B du demi-diametre CB, sur son conjugué CA, est à ce demi-diametre CA*; car on démontrera de même que dans la proposition présente & le premier corollaire, que tous les éléments du secteur elliptique, sont aux éléments circulaires correspondants; comme le parallelograme sur BC CA est au quarré de CA, ou comme BF à CA.

Corollaire V.

234. Si du centre C (*fig.* 62.) on mene aux extrêmités des doubles ordonnées Mm Nn les droites CM Cm, CN Cn, il sera facile de démontrer que le triangle CNn, est au triangle CMm, comme BF à CA, ou que

$CNn : CMm :: BF : CA$, d'ailleurs nous avons par le précédent corollaire

$$NAn : MAm :: BF : CA$$

donc $CNn : NAn :: CMm : MAm$

donc en composant & alternant

$$CNn + NAn : CMm + MAm :: CNn : CMm :: BF : CA.$$

C'est-à-dire que la surface d'un secteur elliptique, est à celle du secteur circulaire correspondant, comme la droite BF (déterminée comme nous le supposons) *est au demi-diametre* CA.

Corollaire VI.

235. Il suit encore de cette proposition que la surface d'un ellipse dont Aa bB, sont deux diametres conjugués (fig. 63) est égale à celle d'une autre ellipse qui auroit pour axe une droite Dd comprise entre les tangentes BD bd paralléles au diametre Aa, menées par les extrémités du diametre Bb; car la surface de l'ellipse qui a les droites Aa Dd pour axe, est à la surface du cercle décrit sur Aa; comme DC est à CA, & de même la surface de l'ellipse dont Aa & bB sont les diametres conjugués, est à la surface du cercle sur Aa; comme BF ou DC qui lui est égal, est à CA: donc ces deux surfaces elliptiques, ont un même rapport avec la surface du cercle décrit sur CA, donc elles sont égales entr'elles. On peut encore démontrer ce corollaire d'une autre maniere comme il suit.

Puisque ces deux ellipses $aBAb$, $aDAd$, fig. 63. sont comprises entre mêmes paralléles, il y a

même nombre d'éléments dans l'une & dans l'autre. Il est évident de plus, que la ligne BF ou DC est celle qui doit mesurer le nombre des éléments, ainsi il n'y a qu'a faire voir que les éléments de l'une sont égaux aux éléments correspondants de l'autre. Par un point P soit menée l'ordonnée PN, & sur le prolongement de la même ligne l'ordonnée pn. Dans l'ellipse $aBAb$, on aura $PN^2 : CB^2 - CP^2 :: CA^2 : CB^2$, donc $PN^2 = \frac{CB^2 - CP^2}{CB^2} \times CA^2$ de même dans l'ellipse $aDAd$, on aura $pn^2 : CD^2 - CP^2 :: CA^2 : CD^2$, donc $pn^2 = \frac{CD^2 - CP^2}{CD^2} \times CA^2$.

Mais à cause des triangles semblables CBD, CPp on a $CB : CP :: CD : Cp$, donc $CB^2 : CP^2 :: CD^2 : Cp^2$, & *dividendo* $CB^2 - CP^2 : CB^2 :: CD^2 - Cp^2 : CD^2$, ou $\frac{CB^2 - CP^2}{Cb^2} = \frac{CD^2 - Cp^2}{CD^2}$, d'où il suit que les ordonnées correspondantes PN, pn sont égales; puisque les quantités qui multiplient CA le sont entr'elles. Donc ces deux ellipses sont aussi égales.

REMARQUE.

Ce corollaire est encore vrai dans le cas où les deux ellipses qui ont un diametre commun, auroient aussi des diametres Bb Dd inégalement inclinés, mais compris entre les paralléles BD bd, & c'est une propriété générale & commune à toutes les sections coniques.

PROPOSITION XLII.

PROBLÊME.

236. *Trouver la surface d'une ellipse dont* A a

B b *ſont deux diametres déterminés de grandeur & de poſition.*

SOLUTION.

On cherchera d'abord la ſurface d'un cercle qui auroit un rayon égal à CA, en ſe ſervant du rapport de Metius pour déterminer la circonférence de ce cercle, qui eſt à peu près 355 lorſque le diametre eſt exprimé par 113 on dira donc $113 : 355 :: CA : \frac{355}{113} \times CA$: ce quatrieme terme eſt la demi circonférence du cercle qui auroit CA pour rayon, multipliant cette quantité par le rayon on aura ou la ſurface de ce cercle $\frac{355}{113} CA^2$. Cette ſurface ainſi déterminée, on abaiſſera la droite BF de l'extrémité B du diametre Bb, ſur ſon conjugué aA, & l'on fera $CA : BF :: \frac{355}{113} CA^2 : \frac{355}{113} \frac{CA^2 \times FB}{CA} = \frac{355}{113} CA \times FB$, & le quatrieme terme ſera la ſurface de l'ellipſe. Si les diametres aA bB ſont à angles droits, ou ſont les axes de l'ellipſe, on aura alors $BF = BC$ & partant la ſurface de l'ellipſe eſt à peu près les $\frac{355}{113}$ du rectangle des deux demi-axes. Cette ſolution ſuit évidemment de tout ce qui précede & n'a pas beſoin d'autre démonſtration.

PROPOSITION XLIII.

PROBLÊME.

237. *Trouver la ſurface d'un ſegment elliptique formé par une corde quelconque* N n *& une partie du perimettre de l'ellipſe.* (fig. 62.)

SOLUTION.

Par le centre C de l'ellipse, & le point P milieu de la corde Nn, on menera un diametre $aCPA$, auquel on menera son conjugué Bb puis ayant décrit un cercle sur le premier, par le point P on menera une corde MPm, qui déterminera le segment circulaire correspondant au segment elliptique donné, dont on cherchera la surface, que nous représenterons par MAm, enfin ayant abaissé la perpendiculaire BF, on fera cette proportion $BF:CA::MAm:\frac{MAm \times CA}{BF}$, & ce dernier terme exprimera la surface du segment elliptique. Si le diametre CA coupoit la corde Nn perpendiculairement, l'ordonnée Mm qui détermine le segment circulaire correspondant, se confondroit avec la corde Nn, les droites Aa, Bb, seroient les axes de l'ellipse, & l'on auroit la surface de ce segment de la même maniere. Ainsi pour trouver l'aire d'un segment elliptique quelconque, il faut chercher d'abord le segment circulaire correspondant, & le multiplier par le rapport du diametre aA sur lequel on a décrit le cercle, à son conjugué BC.

PROPOSITION XLIV.

PROBLÊME.

238. *Trouver la surface d'un secteur elliptique, formé par deux droites* C N C n *& une partie* N A n *du périmetre de l'ellipse.* (fig. 62)

SOLUTION.

Par les points Nn, on menera une droite Nn; par le point P milieu de cette corde & le centre C, on fera passer un diametre CPA, sur lequel on décrira un cercle MAm: au point P, on élevera la double ordonnée mPM, & l'on tirera au centre C, les droites CM Cm, pour avoir un secteur circulaire correspondant au secteur elliptique proposé. On cherchera d'abord la surface de ce secteur circulaire en multipliant l'arc MAm par la moitié du rayon CA, & ayant mené le demi-diametre CB parallèle à la corde Nn & conjugué à CA, & abaissé la perpendiculaire BF, on fera cette proportion

$$CA : BF :: MAm \times \tfrac{1}{2}CA : \frac{MAm \times BF \times \tfrac{1}{2}CA}{CA} = \frac{MAm \times BF}{2},$$

d'où il suit que pour trouver la surface d'un secteur elliptique quelconque il faut d'adord déterminer le secteur circulaire correspondant & multiplier l'arc de ce secteur circulaire par la moitié de la droite BF qui sera un des demi axes lorsque le diametre qui coupe Nn en deux également sera perpendiculaire à cette corde.

PROPOSITION XLV.

PROBLÉME.

239. *Une ellipse* BAN *étant donnée* (fig. 62.) *dont* CA *&* CB *sont deux diametres conjugués l'un à l'autre, trouver un secteur* NCA *qui soit*

à la surface de l'ellipse dans une raison donnée ; ou, si l'on veut, partager l'ellipse, en un certain nombre de parties égales en commençant par une ligne qui va du centre C à un point déterminé A du perimetre de cette courbe.

SOLUTION.

Soit proposé par exemple de trouver un secteur ACN qui soit la huitieme partie de l'ellipse, ou, si l'on veut, de partager l'ellipse en huit parties égales par des lignes menées du centre vers le perimetre, à commencer par la ligne CA; avec cette ligne comme rayon, on décrira un cercle du centre C, on prendra l'arc AM égal à la huitieme partie de la circonférence, ou, ce qui revient au même, on fera l'angle ACM de 45 dégrés, du point M on abaissera l'ordonnée MP perpendiculaire au diametre CA, par le point P ainsi déterminé, on menera la droite PN paralléle au diametre CB, & l'on tirera la droite CN qui donne le secteur demandé égal à la huitieme partie de la surface de l'ellipse. Car puisque l'arc du cercle AM a été fait égal à la huitieme partie de la circonférence, le secteur ACM sera la huitieme partie du cercle, d'ailleurs à cause de l'ordonnée PN menée dans l'ellipse par le même point P que l'ordonnée PM, le secteur elliptique est un secteur correspondant au secteur circulaire ACM:

donc $NCA : MCA :: BF : CA$ (*num* 230)

$BF : CA :: S.\ ellip. : S.\ cir.$

donc $NCA : MCA :: S.\ ellip. : S.\ cir.$ & partant le secteur elliptique est la huitieme partie de la surface de l'ellipse, puisque, par construction, le secteur circulaire est la huitieme partie de la surface du cercle.

DÉFINITION.

240. Deux ellipses sont *semblables*, lorsqu'on peut leur inscrire des figures semblables d'un même nombre de côtés.

PROPOSITION XLVI.

THÉOREME.

241. *Si les deux axes* AB DE *d'une ellipse, sont proportionels aux deux axes* a b d e *d'une autre; ces deux ellipses seront semblables entr'elles.*

DÉMONSTRATION.

Par les foyers $F f$ soient menées les droites GFH $g f h$, qui seront chacunes égales aux parametres des axes AB ab. (*num.* 141) & soient tirées les droites AD, DG, GB, GH, HE, EA dans l'une, & les droites $a d$, $d g$, $g b$, $g h$, $h e$, $e a$ dans l'autre; il est aisé de faire voir que la premiere figure sera semblable à la seconde, il n'y a qu'à montrer que chacune est composée d'un même nombre de triangles, & que chacun est semblable à son correspondant. 1° le triangle ADC rectangle en C, est semblable au triangle rectangle $a d c$. Car puisque les axes sont proportionels, les moitiés le seront aussi, & l'on aura $AC : CD :: ac : cd$ donc ces triangles sont

semblables puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionels. Par la même raison *DCB* est aussi semblable à *dcb*. On démontrera avec la même facilité que le triangle *DGB*, est semblable au triangle *dgb*, en faisant voir qu'ils ont un angle égal *B*, *b* compris entre côtés proportionels, & pour cela il faudra établir auparavant la similitude des triangles rectangles *GFB* *gfb* ce qui ne souffre aucune difficulté. On démontreroit les mêmes choses de l'autre côté, donc la figure *ADGBHE* est semblable à la figure *adgbhe* & partant l'ellipse *ADBE* est aussi semblable à l'ellipse *adbe* C. Q. F. D.

Corollaire.

242. Les ellipses semblables, ou dont les axes sont proportionels, sont entr'elles comme les quarrés des mêmes axes, des parametres, des axes ou diametres semblablement tirés, ou comme les quarrés des ordonnées qui passent par les foyers. Car il est aisé de conclure des articles 235 & 236, que les aires de deux ellipses quelconques sont entr'elles comme les rectangles des deux axes, ou comme les parallélogrames formés sur deux diametres conjugués quelconques, qui sont égaux à ces rectangles, suivant ces articles; donc en désignant l'ellipse dont *AB* & *DE* sont les axes par *ABDE* & celle qui a pour axes les droites *ab*, *de* par *abde*, on auroit $ABDE : abde :: AB \times DE \times ab \times de$

mais $AB : DE :: ab : de$ par hypothese,
& $AB : AB :: ab : ab$.
donc en multipliant par ordre.

$$AB^2 : AB \times DE :: ab^2 : ab \times de$$

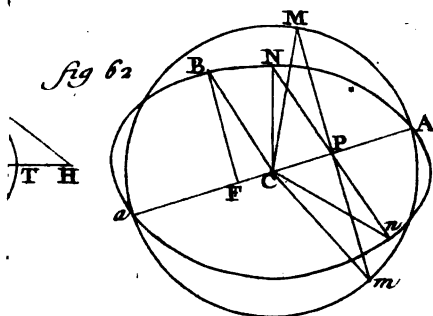
donc $ABDE : abde :: AB^2 : ab^2$ C.Q.F.D.

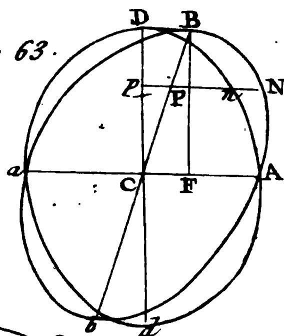
REMARQUE.

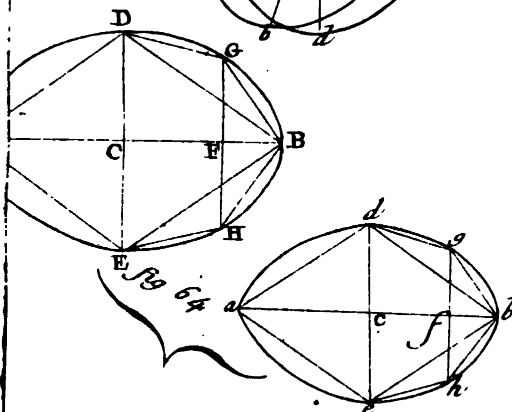
Il ne faut pas confondre une ellipse semblable à une autre, avec une autre courbe dont la courbure est partout également distante de celle d'une ellipse donnée, ou paralléle au périmetre de cette ellipse. On démontre que cette courbe est d'un dégré supérieur & ne peut être prise pour une ellipse. Cette vérité sera facile à appercevoir, si l'on fait attention qu'en allongeant les deux extrémités des axes, d'une même quantité, les nouveaux axes qui en résultent ne sont pas proportionels, à moins que ces axes ne soient égaux, auquel cas l'ellipse devient un cercle. Dans tout autre cas, si l'on vouloit décrire cette courbe on pouroit le faire aisément par le moyen des perpendiculaires aux tangentes, en suivant ce qui a été dit, (*art.* 170.) pour mener ces sortes de lignes à une tangente quelconque.

On voit encore qu'il n'en est pas des ellipses comme des paraboles, qui sont toutes des figures semblables.

Fin de l'Ellipse.


fig 62
M
B
N
A
P
T
H
F
C
a
n
m


fig 63.
D
B
p
P
n
N
a
C
F
A
H
b
d


D
G
B
C
F
H
E
fig 64
d
g
a
c
f
b
h
e



DE L'HYPERBOLE,

LIVRE TROISIEME.

Des propriétés de l'Hyperbole considerée sur un Plan.

Génération & description de cette Courbe.

243.  *I l'on a sur un plan* (fig. 65) *une ligne droite* I T, *divisée en deux également, en* C, *& deux autres points* F D, *sur la même ligne, chacun également éloigné du point* C, *je dis que l'on poura trouver une infinité de poinss* P *ou* p, *à droite & à gauche de la ligne* I T, *prolongée indéfiniment de part & d'autre vers* G *&* g, *tels que la différence des lignes* F P P D, *ou* F p p D *menées de chacun de ces points* P *ou* p *aux points* F D, *soit toujours égale à la même ligne* I T; *ou, ce qui est la même chose, que l'on aura pour un point quelconque* P *ou* p, $FP - PD$ *ou* $PD - PF = IT$, *& de même* $pD - pF = IT$.

DÉMONSTRATION.

Du point F comme centre avec un rayon quelconque FG, on décrira un arc de cercle pGP d'une grandeur indéfinie de part & d'autre de la ligne IT; & ayant ensuite porté la partie DT de T en d du point D comme centre avec un rayon dG, on décrira un autre arc de cercle qui coupera le premier en deux points pP qui seront tels que l'on aura $FP - PD = IT$, car par l'hypothese, les parties IF DT sont égales, & l'on a fait $dT = DT$, donc $Fd = IT$. Ce la posé, à cause du cercle dont dG est le rayon, on a $DP = dG$, & à cause du cercle dont FG est le rayon, on a $FP = FG$. Donc $FP - PD = FG - dG = Fd$ ou IT. Si l'on veut avoir encore d'autres points, du point F comme centre on décrira une autre portion de cercle avec un autre rayon FG, & coupant le premier cercle en deux points par un autre cercle décrit du point D comme centre avec un rayon dG, on aura encore deux autres points, il est de plus évident que l'on poura trouver une infinité de points toujours tels que $FP - DP = IT$. C. Q. F. D.

REMARQUE

244. Il est aisé de voir que le rayon variable FG, ne peut pas être plus petit que FT, car alors les cercles décrits du rayon FT, & du rayon DT, ne font que se toucher, & si le point G tomboit entre les points C & T,

comme

comme en G' les cercles décrits des points F & D, avec les rayons FG' & dG' ne pourroient plus se couper ni se toucher en aucun point. Il est encore évident que l'on pourra trouver de la même maniere une infinité de points de l'autre côté de la ligne IT, & qu'un rayon FG avec son correspondant dG, peuvent servir à trouver les quatres points $P\,p\ P\,p$, audessus & audessous de C, qui ayent les mêmes propriétés ; enfin que les courbes opposées qui passeront par ces deux suites de points, seront entierement égales & semblables.

COROLLAIRE.

245. Il suit de cette construction que si l'on joint deux points $P\,p$ par une droite POp, cette ligne sera perpendiculaire à la ligne IT, prolongée autant qu'il est nécessaire. Car à cause du cercle dont DP est le rayon, les points $P\,p$ sont également éloignés du point D, & à cause du cercle Fp est le rayon, les mêmes points $P\,p$ sont également éloignés du point F de la même droitte IT, donc cette droite a deux de ses points également distans des extrémités de la droite Pp, elle lui est donc perpendiculaire, & réciproquement, la droite Pp lui sera perpendiculaire. Il suit encore de là que si par un point P on mene une ligne perpendiculaire à la ligne IT, cette ligne passera aussi par l'autre point p, & sera coupée en deux également au point O, car si cela n'étoit pas la démonstration précedente seroit fausse. Il

suit de plus de cette construction, que la ligne courbe *PPTpp* & son opposée *PPIpp* s'éloignent à l'infini du point *C*, & que leurs branches s'éloignent aussi continuellement l'une de l'autre; car l'angle *DFP* s'augmente continuellement à mesure que les rayons *FG* deviennent plus grands. Enfin on voit clairement que les deux courbes ensemble ou séparément, ne peuvent jamais enfermer un espace.

DÉFINITIONS.

I.

246. Chacune des lignes courbes qui passent par les points *Pp*, s'appelle *hyperbole*, & les deux ensemble s'appellent *hyperboles opposées*.

II.

247 Le point *C*, milieu de la droite *IT*, s'appelle *centre* des hyperboles opposées.

III.

248. Les points *F D* placés sur la ligne *IT*, à égale distance du centre *C*, sont nommés *foyers* des mêmes hyperboles.

IV.

249. La ligne droite *IT* prolongée autant que l'on voudra, est appellée *axe déterminé*, ou premier axe des hyperboles, & la droite *NCM* perpendiculaire à cet axe & qui passe par le centre, est appellée *second axe indéterminé* des mêmes courbes.

V.

250. Les lignes droites comme PO, menées d'un point de la courbe perpendiculairement à son axe, sont nommées *ordonnées* ou *appliquées* au même axe : une droite Pp est une double ordonnée à l'axe IT, car on a vu que toutes ces lignes sont coupées en deux également par l'axe. (*num.* 245.)

VI.

251. Les lignes droites comprises entre les extrémités de l'axe & la rencontre des ordonnées sont appellées *abscisses* ou *coupées* de l'axe par rapport à ces ordonnées, ainsi IO OT sont les abscisses de l'ordonnée PO.

VII.

252. Toutes les lignes qui passent par le centre des hyperboles & se terminent de part & d'autre à chacune des hyperboles opposées sont appellées *diametres.* Les lignes qui passent par le centre & ne rencontrent point les hyperboles, sont appellées *diametres indéterminés.*

VIII.

253. Une ligne droite qui ne rencontre l'hyperbole qu'en un point & ne peut la couper étant prolongée, est appellée *tangente* en ce point.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

254. *Supposant la construction précédente de l'hyperbole, (fig. 66.) Je dis que le quarré d'une ordonnée* PO *à l'axe* IT, *est au rectangle* IO×OT *de ses abscisses* IO OT, *comme le rectangle* IF×FT *ou* ID×DT *est au quarré de* CT *moitié du premier axe* IT, *c'est-à-dire que l'on aura toujours cette proportion pour une ordonnée quelconque.*

$$PO^2 : IO \times OT :: ID \times DT : CT^2.$$

DÉMONSTRATION.

Par les foyers F D & le point P origine de l'ordonnée PO, soient menées les lignes FP DP, de ce point P comme centre, avec le rayon DP soit décrit un cercle qui coupe l'axe IT en deux points D G, & la ligne FP en A, & soit prolongée la ligne FP jusqu'au cercle en B, on aura FA ou $FP - AP = IT$, car $AP = PD$, *& par la génération de l'hyperbole* $FP - DP = IT$: donc si l'on divise cette ligne FA en deux également en R, on aura $FR = CT$. Cela posé, à cause du cercle on aura $FG \times FD = FA \times FB$, d'où l'on tire $FA : FD :: FG : FB$, & prenant les moitiés de chaque terme FR ou $CT : CD :: CO : RP$, car à cause du cercle les segmens DO & OG étant égaux, ainsi que les parties CF CD, on a $FG = FD + DG$, $= 2CD + 2OD$, donc $\frac{FG}{2} = CD + OD = CO$, on verra aussi aisément que $RP = \frac{FB}{2}$, car $FB = FA + AB = 2RA + 2AP$ donc $\frac{FB}{2} = RA + AP = RP$.

reprenant la derniere proportion, on aura *componendo*

$CT : CT+CD :: CO : CO+RP$ & *alternando.*

$CT : CO :: CT+CD : CO+RP$. & encore *comp.*

$CT : CT+CO :: CT+CD : CT+CD+CO+RP$, ou, en réduisant, $CT : IO :: ID : FP+FO$; en mettant IC à la place de CT, dans le second & troisieme terme, & dans le dernier, les lignes FR, à la place de CT & CF à la place de CD, si on reprend encore la proportion primitive $CT : CD :: CO : RP$, on aura *dividendo.*

$CT : CD-CT :: CO : RP-CO$ & *alternando.*

$CT : CO :: CD-CT : RP-CO$ & faisant encore un *dividendo.*

$CT : CO-CT :: CD-CT : RP-CO-CD+CT$. ou en réduisant $CT : OT :: DT : FP-FO$, en mettant dans le dernier terme FR à la place de CT, & CF à la place de CD; si donc on multiplie les deux dernieres proportions résultantes les unes par les autres, on aura

$CT^2 : IO \times OT :: ID \times DT : (FP+FO) \times (FP-FO) = FP^2 - FO^2 = PO^2$, car à cause du triangle rectangle FOP il est clair que l'on a $PO^2 = FP^2 - FO^2$ donc *invertendo & altern.*

$PO^2 : IO \times OT :: ID \times DT : CT^2$. C.Q.F.D.

Si le cercle décrit du rayon DP, *ne faisoit que toucher le prolongement de l'axe* I T, *ce qui arriveroit dans le cas où l'ordonnée passeroit par le foyer, la proportion seroit toujours la même & la démonstration n'en deviendroit*

que plus facile, on auroit alors

$PD^2 : ID \times DT :: ID \times DT : CT^2$.

Corollaire I.

255. Puisque l'on a $PO^2 : IO \times OT :: ID \times DT : CT^2$, si par un autre point p de l'hyperbole ou de son opposée, on mene une autre ordonnée po à l'axe, on aura encore $po^2 : Io \times oT :: ID \times DT : CT^2$, mais dans ces deux proportions le dernier rapport est toujours le même ; donc on aura $PO^2 : IO \times OT :: po^2 : Io \times oT$; ou *alternando* $PO^2 : po^2 :: IO \times OT : Io \times oT$; d'où il suit que dans l'hyperbole ou dans les hyperboles opposées les quarrés de deux ou d'un nombre quelconque d'ordonnées, sont entr'eux comme les produits des abscisses correspondantes à ces ordonnées.

Au lieu des rectangles $IO \times OT$ $Io \times oT$, on peut mettre des expressions qui leurs sont égales $CT^2 - CO^2$ & $CT^2 - Co$. Nous nous servirons de l'une ou de l'autre expression selon qu'elles seront plus commodes pour les démonstrations.

Corollaire II.

246. Si du point T origine de l'axe IT comme centre, avec un rayon CD, on décrit une portion de cercle qui coupe l'axe indéterminé en deux points M & N, on aura, après avoir tiré TM, dans le triangle TCM, $CM^2 = TM^2 - CT^2 = CD^2 - CT^2 = ID \times DT$. Donc dans les proportions précédentes, on

pourra mettre CM^2 à la place du rectangle $ID \times DT$. Ainsi l'on aura pour chaque ordonnée $PO^2 : IO \times OT :: CM^2 : CT^2$. Si l'on prend $CN = CM$, la ligne entiere MN supposée perpendiculaire à l'axe IT est appellée *second axe* des hyperboles opposées; ou axe *conjugué* au premier axe IT.

Corollaire. III.

257. Puisque l'on a $PO^2 : IO \times OT :: CM^2 : CT^2$, on aura aussi $PO^2 : IO \times OT :: MN^2 : IT^2$; car MN est double de CM, & IT est double de CT, donc leurs quarrés seront entr'eux comme ceux des lignes CM & CT.

PROPOSITION II.

Théorême.

Si par un point P *de l'une des hyperboles opposées, on mene une droite* Pp, *parallele à l'axe* IT, *qui rencontre l'autre hyperbole dans un point* p, *je dis que cette ligne* Pp *sera coupée en deux également en* Q *par le second axe* MN *prolongé, s'il est nécessaire.* (Fig. 66.)

Démonstration.

Cette proposition suit évidemment de la construction des hyperboles opposées, car puisque ces deux courbes sont égales, semblables, & semblablement disposées à l'égard de leurs axes communs IT MN; les ordonnées PO po seront égales entr'elles, étant d'ailleurs paralléles, & comprises entre paralléles, donc

leurs abſciſſes OT, Io ſeront auſſi égales ; on aura donc en leur ajoutant les lignes égales CT CI, $CO = Cb$ & à cauſe des parallèles Pp Oo, on aura $PQ = pQ$. C. Q. F. D.

REMARQUE.

259. Les ordonnées ſervant à déterminer les points des hyperboles, par le moyen du rapport conſtant qu'elles ont avec leurs abſciſſes, on peut auſſi déterminer les points de chaque hyperbole, en menant des ordonnées au petit axe MN prolongé autant qu'il ſera néceſſaire, & dans ce cas les parties CQ, ſont regardées comme les abſciſſes.

PROPOSITION III.

Théorème.

260. *Si d'un point* P *de l'une des hyperboles oppoſées, on mene au ſecond axe* MN ; *une ordonnée* PQ, (Fig. 66.) *on aura pour chaque ordonnée*, $PQ^2 : CM^2 + CQ^2 :: CT^2 : CM^2$. *C'eſt-à-dire que le quarré d'une ordonnée quelconque au petit axe, eſt à la ſomme des quarrés du demi petit axe & de l'abſciſſe correſpondante ; comme le quarré du demi grand axe, au quarré du demi petit axe.*

Démonstration.

Puiſque l'on a $PO^2 : CO^2 - CT^2 :: CM^2 : CT^2$, on aura auſſi *alternando* $PO^2 : CM^2 :: CO - CT^2 : CT^2$ & *componendo*. $PO^2 + CM^2 : CM^2 :: CO^2 - CT^2 + CT^2 : CT^2$, mais $PO^2 = CQ^2$, & $CO^2 = PQ^2$, donc $CQ^2 + CM^2 : CM^2 ::$

$PQ^2 : CT^2$, ou *alternando & invertendo.*

$PQ^2 : CQ^2 + CM^2 :: CT^2 : CM^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

261. Si l'on mene une autre ordonnée pq, on aura encor $pq^2 : CM^2 + cq^2 :: CT^2 : CM^2$, donc puisque nous avons pour l'ordonnée PQ, $PQ^2 : CM^2 + CQ^2 :: CT^2 : CM^2$, on aura $PQ^2 : pq^2 :: CM^2 + CQ^2 : CM^2 + cq^2$, D'où il suit que les quarrés des ordonnées au petit axe, sont entr'eux comme les sommes des quarrés du demi petit axe & des abscisses correspondantes à ces ordonnées.

COROLLAIRE II.

262. Si l'hyperbole est équilatére, c'est-à-dire, si ses deux axes sont égaux; on aura $PQ^2 = CM^2 + CQ$ d'où l'on déduit une méthode fort simple de décrire cette espece d'hyperbole; comme on le verra dans la description des sections coniques.

DÉFINITION.

263. Une troisieme proportionelle aux deux axes est appellée *parametre* de celui qui occupe le premier terme de la proportion. Si l'on fait cette proportion continue, $IT : MN :: MN : TV$. (Fig. 67.) la ligne TV sera le parametre de l'axe IT, d'où il suit que le rectangle d'un axe par son parametre, est égal au quarré de l'autre axe conjugué au premier.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

264. *Supposant le parametre* TV *de l'axe* IT, *élevé perpendiculairement à cet axe au sommet* T *de l'hyperbole, & une ordonnée* PO *prolongée indéfiniment vers* S, *si l'on fait cette proportion* TV : IT :: OS : IO, *je dis que le quarré de cette ordonnée* PO, *sera égal au rectangle de l'abscisse* OT, *par la droite* OS. (Fig. 67.)

DÉMONSTRATION.

Par la propriété des ordonnées à l'axe IT on a
$PO^2 : IO \times OT :: MN^2 : IT^2$ & par la nature du parametre
$MN^2 : IT^2 :: TV : IT$, & par hypothese
$TV : IT :: OS : IO$
Multipliant par OT, $OS : IO :: OS \times OT : IO \times OT$.
donc $PO^2 : IO \times OT :: OS \times OT : IO \times OT$, mais les deux conséquents sont égaux, donc les antécédens le sont aussi, donc $PO^2 = OS \times OT$, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

265. Ayant achevé le rectangle de l'axe par le parametre, si l'on mene par le point V, la droite VR paralléle à l'axe, il est aisé de voir que le rectangle VS est semblable à celui de l'axe par le parametre, & que ce rectangle est l'excès du quarré de l'ordonnée PO sur celui de l'abscisse OT par le même parametre TV, & comme le quarré de chaque ordonnée surpasse toujours le rectangle de son abscisse par le parametre d'un rectangle semblable à celui de l'axe par la même ligne, on a donné le

nom d'hyperbole à la courbe que nous examinons, pour désigner cet excédent toujours constant du quarré d'une ordonnée sur le rectangle d'une de ses abscisses par le parametre.

COROLLAIRE II.

266. Si l'hyperbole est équilatére, le parametre est égal à l'axe, & dans ce cas le quarré de l'ordonnée sera égal au rectangle $IO \times OT$ de ses abscisces; comme on l'a deja vu, puisque dans ce cas la ligne RS devient égale à la ligne VR ou OT, qui lui est égale.

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

267. *Dans une hyperbole quelconque,* (Fig. 67) *la double ordonnée* P F p *qui passe par le foyer* F, *est égale au parametre de l'axe.*

DÉMONSTRATION.

Soit l'ordonnée PF qui passe par le foyer F; on aura par la premiere proposition $PF^2 : IF \times FT :: IF \times FT : CT^2$ mais $IF \times FT$ ou $CF^2 - CT^2 = CM^2$, donc $PF^2 : CM^2 :: CM^2 : CT^2$, & prenant les racines de la proportion inverse $CT : CM :: CM : PF$ d'où il suit évidemment que PF est le demi parametre de l'axe IT, puisqu'elle est troisieme proportionelle aux deux demi-axes. Donc Pp double de PF est le parametre. C. Q. D. F.

COROLLAIRE

268. Il suit de cette proposition & des arti-

cles 66. & 141 de la parabole & de l'ellipse; que cette propriété est commune à toutes les sections coniques, sans en excepter le cercle, avec cette différence que de toutes ces courbes, la parabole, est la seule dans laquelle elle soit générale, comme nous avons vu, ainsi lorsqu'on connoît le foyer de chacune de ces courbes, il est aisé d'en connoître le parametre, & réciproquement connoissant un axe & son parametre, on pourra toujours trouver les foyers sur cet axe ou sur son conjugé.

PROPOSITION VI.

Théorême.

269. *Si par un point* P *de l'une des hyperboles opposées & par le centre* C, (Fig. 68.) *on mene une droite* P C p, *je dis qu'elle rencontrera l'hyperbole opposée, & sera coupée en deux également au centre* C.

Démonstration.

Du point P soit menée l'ordonnée PO à l'axe IT, & soit prise de l'autre côté $Co = CO$, par le point o soit élevée l'ordonée po au même axe IT, qui rencontrera l'hyperbole en p. Puisque les abscisses IO To sont égales, les ordonnées PO po le sont aussi & de plus comme elles sont ordonnées au même axe, elles lui sont chacunes perpendiculaires, donc les triangles COP Cop ont un angle droit compris entre côtés égaux, donc leurs hypotenuses PC pC sont aussi égales. De plus les angles

P C O p c o sont égaux, & la ligne *I T* est une seule ligne droite, donc la ligne *P p* l'est aussi, & est coupée en deux également par le centre *C*, puisque les hypoténuses *P C p c* sont égales. C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

Théoreme.

270. *Si par l'extrémité* T *de l'axe, on éleve la perpendiculaire* T X (Fig. 67.) *je dis que cette ligne ne rencontre l'hyperbole, qu'au seul point* T, *ou, ce qui revient au même, qu'elle est tangente en ce point.*

Demonstration.

Si la ligne *T X*, n'est pas tangente à la courbe au seul point T, elle aura encore quelqu'autre point comme *S* qui pourra lui appartenir, ayant pris $Tf = TF$, on aura $Df = IT$; & parceque le point *S* est supposé à l'hyperbole, on aura aussi par la génération de cette courbe $DS - FS = IT$ ou $DS = IT + FS$, ou enfin $DS = Df + fS$ puisque $Df = IT$ & que $fS = FS$, ce qui est absurde, puisque les deux côtés d'un triangle sont nécessairement plus grand que le troisieme. On démontrera de la même maniere, que l'on ne peut pas supposer tout autre point de la ligne *T X* à l'hyperbole, sans un pareil inconvénient, il est donc évident que cette ligne n'a qu'un point de commun avec la courbe, & de plus elle est entierrement au dehors de l'hyperbole, puisque cette courbe

s'éloigne de plus en plus de l'axe auquel la ligne *TX* eſt parallèle, donc cette ligne eſt tangente au ſeul point *T*; comme on l'avoit ſuppoſé. C. Q. F D.

PROPOSITION VIII.

Théoreme.

271. *Suppoſant toutes choſes, comme dans la premiere propoſition, ſi l'on mene la ligne* A D *(Fig. 69.) & que par le point* E *milieu de cette ligne on tire par le point* P *la ligne* PEH, *je dis que cette ligne ſera tangente en* P.

Démonstration.

Suppoſons que cette ligne ne ſoit pas tangente, ou, ce qui eſt la même choſe, qu'elle puiſſe rencontrer encore l'hyperbole dans quelqu'autre point *p*, de ce point ſoient menées aux points *D*, *A*, *F*, les droites *pD*, *pA*, *pF*, ſi ce point *p* eſt à l'hyperbole, on aura $pF - pD = IT$, ou FA qui lui eſt égal, *par conſtruction*: ce la poſé, puiſque la ligne *PH* paſſe par le point *E* milieu de *DA* & que l'on a $PA = PD$, il eſt viſible que cette ligne eſt perpendiculaire ſur le milieu de *DA*, donc tous ſes points & par conſéquent le point *p*, ſeront à égale diſtance des mêmes extrémités *A* & *D*, donc $pA = pD$, mais à cauſe du triangle *pAF*, $pA + AF > pF$, donc auſſi $pD + AF > pF$, & ôtant de chaque membre *pD*, on aura $AF > pF - pD$. Le point *p* n'eſt donc pas à l'hyperbole comme on l'avoit ſup-

posé puisque la différence des lignes pF pD n'est pas égale à l'axe IT ou AF. On démontreroit la même chose de tout autre point, soit qu'on le prenne au-de-là du point P, par rapport à la ligne AD, ou entre le point P & la même ligne; il est donc démontré, 1°. que la ligne PE ne rencontre l hyperbole, qu'en un seul point; je dis de plus qu'elle ne peut passer au de dans de cette courbe, ou, ce qui revient au même, qu'aucun point comme S au-de-là de la ligne PE, par rapport à l'axe, ne peut être à l'hyperbole. Pour le démontrer soient encore menées les lignes SF SA SD, il est évident que AS est plus petit que DS, puisque dans le triangle ADS l'angle DAS, est plus grand que l'angle ADS, cela posé, pour que le point S fût à l'hyperbole il faudroit que l'on eut $FS-DS = AF$ ou IT; ce qui ne peut arriver; car à cause du triangle SAF nous avons $AF+AS > FS$, & partant $AF > FS-AS$ donc à plus forte raison $AF > FS-DS$, d'où il suit que le point S n'est point à l'hyperbole puisque la différence des lignes menées de ce point aux foyers, n'est pas égale au grand axe, d'où il suit évidemment que cette ligne PF est tangente au seul point P. C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

THÉOREME.

372. *Par un point* P *donné sur une hyperbole, on ne peut mener qu'une tangente* PH, (Fig. 70.)

DÉMONSTRATION.

Supposons d'abord que par le point P on puisse mener dans l'angle DPE, une autre tangente Ph, différente de la tangente PH; du foyer D, j'abaisse sur cette ligne la perpendiculaire Da prolongée indéfiniment: du point F comme centre avec le rayon FA ou IT, je décris un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire Dg en a, par le point a & le foyer F je mene la ligne Fap, qui va rencontrer l'hyperbole dans un point p, du quel je mene au foyer D la ligne pD : enfin par le milieu e de la droite aD, & le point p je mene une ligne ep qui sera tangente en ce point par la proposition précédente. Cela posé il est aisé de reconnoître que la ligne Ph ne peut être tangente en P, car çette ligne étant, *par construction* perpendiculaire sur la ligne aD sera parallele à la tangte pe qui est aussi perpendiculaire à la même ligne, comme on l'a vu précédemment, & elle sera par tout également éloignée de cette tangente de la distance eg. Reste à faire voir que cette distance est tout entiere du côté de l'axe IT, ou, ce qui est la même chose, entre la tangente pe & le même axe. A cause du triangle FPa, $Fa+aP>FP$, mais $FP=FA+AP$ ou $Fa+AP$ donc $Fa+aP>Fa+AP$, donc $aP>AP$, le triangle DPa n'est donc pas isocele, & le plus grand segment de la base aD sur laquelle on a, *par construction*, abaissé la perpendiculaire Pg, se

ſe trouvera du côté du plus grand côté *a P*, & le plus petit ſegment du côté du plus petit *D P*, d'où il ſuit que la droite *P h* eſt néceſſairement au-de-dans de l'hyperbole puiſque la diſtance *e g* qui la ſépare de ſa paralléle *p e* tangente en *p*, ſe trouve entre cette tangente & l'hyperbole. Donc on ne peut mener qu'une ſeule tangente par un même point *P*. C. Q. F. D.

REMARQUE.

La démonſtation & l'évidence de cette propoſition, ſoit dans la parabole, ſoit dans l'ellipſe & l'hyperbole, ſe réduit à concevoir clairement, qu'une ligne paralléle à une tangente & qui a deja un point ſur la courbe, ne peut être tangente à cette courbe ; rien de plus aiſé à imaginer.

PROPOSITION X.

Théorême.

273. *Si par un point* P (Fig. 69.) *où une droite* PH *touche une hyperbole, on mene aux foyers* F, D, *les droites* PF PD, *dont l'une* F P *ſoit prolongée au-dedans de l'hyperbole vers* L, *je dis que ces lignes forment des angles égaux* DPE pPL *avec la tangente.* PH.

Démonstration.

Puiſque le triangle *DPA* eſt iſocele, & que la tangente *P E* eſt perpendiculaire ſur la droite *A D*, elle diviſe l'angle *D P A* en deux

également, ainsi l'on aura $DPE = EPA$; mais $EPA = pPL$ qui lui est opposé au sommet, donc $DPE = pPL$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

274. Il suit de cette proposition & des lois des corps à ressort qui se réfléchissent en faisant l'angle de réflection égal à celui d'incidence, qu'un corps élastique quelconque, étant parti du foyer D suivant une direction DP, qui va rencontrer la courbe dans un point P, se réfléchira suivant une ligne PL dont le prolongement passe par le foyer F.

REMARQUE.

275 On peut encore conclure de cette proposition & des articles 37. & 155. de la parabole & de l'ellipse, que cette propriété est commune à toutes les sections coniques, c'est-à-dire, que dans une section conique quelconque, un corps qui va d'un foyer de cette courbe à un point de la même courbe, suivant une ligne droite, se réfléchira à sa rencontre suivant une ligne qui passera par l'autre foyer, prolongée s'il est nécessaire. Car on peut conçevoir la parabole comme une courbe qui tient le milieu entre l'ellipse & l'hyperbole, ensorte que ses deux foyers sont à une distance infinie l'un de l'autre; soit qu'ils soient tous les deux placés dans la concavité de cette courcomme cela arrive dans l'ellipse, soit que l'un se trouve au-dedans & l'autre au-dehors

de la courbe sur l'axe prolongé à l'infini, auquel cas la parabole devient un espece d'hyperbole. Il faut encore remarquer que l'on retrouve dans la parabole les propriétes de l'ellipse & de l'hyperbole, par rapport aux axes & aux foyers.

Soit la parabole PT (fig. M.) *dont l'axe est* TF, *la directrice* AG, *le foyer* D, *un autre foyer* f, *à une distance infinie du premier au-dedans de la courbe ou sur le prolongement de l'axe au-dehors comme en* F, *& les points* I, L, *éloignés des points* f, F, *de la grandeur* GT; *je dis que l'on aura toujours* PD + Pf = LT *ou* PF — PD = IT.

Par le point *P*, soient menées perpendiculairement à l'axe & à la directrice les droites *PA*, PQ; par la nature de la parabole (art. 1.) *PD*=*PA*=*QG*; mais à cause du foyer *f*, supposé à une distance infinie, les droites *Pf* & *Qf* sont censées égales & paralléles, donc en leurs ajoutant des lignes égales *PD QG*, on aura *Pf*+*PD*=*Qf*+*QG*=*Gf*=*LT*, en ôtant *GT* & mettant à sa place *LT* qui lui est égale; ce qui revient à la principale propriété de l'ellipse.

De même à cause du foyer *F*, aussi supposé à une distance infinie sur l'axe prolongé, les droites *PF*, *QF* seront égales, donc en ôtant les lignes égales *PD*, *QG*; on aura *PF*—*PD*=*QF*—*QG*=*GF* ou *IT*; ce qui revient à la principale propriété de l'hyperbole.

USAGE DE LA DERNIERE PROPRIÉTÉ.

De l'Hyperbole dans la Catoptrique.

Il suit encore de là, que si l'on place une lumiere au foyer d'une hyperboloïde concave formé par le révolution d'une hyperbole autour de son axe, tous les rayons partis du point lumineux se réfléchiront à la rencontre de la courbe suivant des directions qui passeront par le foyer de l'hyperbole opposée. Si les deux foyers sont fort près les uns des autres, les rayons réfléchis seront très divergents & ne produiront que peu de lumiere à une distance médiocre, mais on sera maître de les rapprocher autant qu'on voudra du parallélisme; en se servant d'une hyperbole dont les foyers soient à une distance considérable, & quoique le diametre de la portion d'hyperboloïde dont on se sert soit petit, on pourra néantmoins éclairer une étendue déterminée à quelle distance on voudra: ce que l'on ne pourroit pas faire par le moyen d'un paraboloïde qui ne peut éclairer par tout qu'une surface égale au cercle qui lui sert de base. On voit par là comment on peut se servir de l'hyperboloïde dans la construction des lanternes à réflection que l'on met aux chaises de postes pour éclairer les voyageurs: on pourroit à la vérité, produire le même effet par le moyen d'une portion concave d'ellipsoide, & on se sert ordinaire-

ment d'une portion de ſphere terminée en cône, mais la lumiere ſouffre pluſieures réflections, qui peuvent en diminuer l'intenſité, au lieu que dans l'hyperboloide chaque rayon ne ne ſe réfléchit qu'une fois & par conſéquent arrive à la même diſtance avec plus de force que s'il l'avoit été pluſieurs fois.

PROPOSITION XL.

PROBLÊME.

276. *Un point* G *étant donné ſur le même plan de l'hyperbole, & hors de cette courbe* (Fig. 71.) *mener par ce point une tangente à la courbe, & déterminer le point* P *de contingence.*

SOLUTION.

Du point donné G, au foyer D, ſoit menée la ligne GD; du même point comme centre avec un rayon GD, ſoit décrite une portion de cercle vers A, enſuite de l'autre foyer F comme centre, avec le rayon FA ou IT, ſoit décrit un autre arc de cercle qui coupe le premier au point A, & ſoient joints les points D, A, par la ligne AD, laquelle ſoit diviſée en deux également en E, enfin par les points G, E ſoit menée la ligne EG, qui ſera tangente en P, où la ligne FA prolongée rencontre l'hyperbole.

DÉMONSTRATION.

Puiſque, *par conſtruction*, on a $GD = GA$; & $DE = AE$, la ligne GE eſt perpendiculaire

sur le milieu de *AD*, donc elle passera par tous les points également éloignés des extrémités *A* & *D* de la ligne *AD*, donc elle doit aussi passer par le point *P*, determiné comme nous l'avons dit ci-dessus, puisque par la nature de l'hyperbole, on a $AP = PD$. De plus le point *P* de la ligne *PG*, est le seul point qui puisse être à l'hyperbole, puisque l'on a $FP - AP = FP - PD = IT$, ou *FA* qui lui est égal, *par construction*, ce qui ne se peut trouver en aucun autre point de de la même ligne, comme il a été suffisamment démontré dans les propositions précédentes. C.Q.F.D.

COROLLAIRE.

277. Si le cercle qui a *GD* pour rayon, coupe l'hyperbole en deux points, on voit aisément que le problême aura deux solutions; car on pourra trouver de la même maniere un point *a* de l'autre côté, qui ait les mêmes propriétés, & joignant la ligne *aD*, la ligne *Gep* qui passera par son milieu *e* & le point *G*, sera aussi tangente à la courbe en *p*.

REMARQUE.

La solution du problême seroit la même, si le point *G* se trouvoit au de-là de *P* ou de *p*, par rapport à l'axe; elle seroit encore la même si le point *G* étoit sur l'hyperbole, comme est le point *P*, en ce cas le problême ne pourroit avoir qu'une solution, parceque les

deux cercles dont $P D$ & $F A$ ou $I T$ sont les rayons, ne font que se toucher en un point; d'où il suit que par un point P donné sur une hyperbole, on ne peut mener qu'une tangente; ainsi cette solution renferme tous les cas possibles.

PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

278. *Supposant encore les choses comme dans la proposition dixieme*, (Fig. 72.) *si l'on divise en deux également l'angle* F P p *formé par les lignes* P F P D, *menées d'un point* P *aux foyers* F D, *par une ligne* P R; *je dis que cette ligne sera perpendiculaire à la tangente*, *&* *que l'on aura comme dans l'éllipse* (Art. 156.) FR : RD :: FP : P D; *c'est-à-dire que les distances du point* R, *dans lequel la perpendiculaire* PR *à une tangente* PH, *rencontre l'axe*, *sont entr'elles comme les distances du point d'attouchement* P *aux mêmes foyers*.

DÉMONSTRATION.

Puisque l'angle pPF a été divisé en deux également, on aura $FPR = RPp$, mais $RPp = NPA$, & de plus (*num.* 273.) $FPE = EPA$, donc $RPF + FPE = NPA + APE$, ou $RPE = NPE$, d'où il suit que la ligne RP est perpendiculaire à la tangente PE. C. Q. F. 1° D.

2° Puisque (*num.* 273.) la ligne AF est perpendiculaire à la tangente, elle sera paralléle

à la ligne *RP* & les triangles *DAF DPR* seront semblables, donc on aura *FR* : *RD* :: *PA* ou *PF* : *PD*. C. Q. F. 2° D.

COROLLAIRE

279. Il suit de cette proposition que jamais le point *R* ne pourra tonmber entre le sommet *T* de l'hyperbole & le foyer *F*, puisque si proche que l'on suppose le point *P* du point *T*, la ligne *PR* se trouvera toujours audedans de l'angle *FPp* qu'elle divise en deux également.

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

280. *Supposant encore toutes choses comme dans la proposition précédente, par un point* P *de l'hyperbole soit tirée une droite* PQ *parallèle à l'axe, sur laquelle on prendra une partie* PQ = PF, *si du point* Q, *ainsi déterminé, & du foyer* F *on mène à la droite* PR, *les perpendiculaires* QN FM, *je dis que l'on aura toujours* NQ : FM :: IT : FD. *C'est-à-dire, que ces perpendiculaires seront toujours entr'elles dans le rapport constant de l'axe* IT *à la distance* FD *des foyers* F, D. (fig. 72).

DÉMONSTRATION.

Les triangles rectangles *PQN RPO* sont évidemment semblables, car à cause des parallèles *PQ FD*, coupées par la même droite *MN*, l'angle *NPQ* est égal à l'angle *PRO*, donc

aura $QN : PQ :: PO : RP$ & à cause des triangles rectangles RPO, RFM, qui sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en R outre l'angle droit, on aura

$PO : RP :: FM : RF$, donc $QN : PQ :: FM : RF$. Ou bien en alternant & mettant FP à la place de PQ qui lui est égal, $QN : FM :: FP : RF$, ou $:: AP : RF$; mais $AP : RF :: AD$ ou $IT : FD$, comme il est évident à cause de paralléles AF, PR, donc $QN : FM :: IT : FD$. C. Q. F. D.

Corollaire. I.

281. Puisque les droites, PF, PQ sont égales (par construction.) Si l'on regarde chacune de ces lignes comme le sinus total, la ligne NQ sera le sinus de l'angle NPQ ou qPR, & la ligne FM sera le sinus de l'angle FPM ou de l'angle FPN son supplément. Donc ces sinus sont toujours entr'eux dans le rapport constant de la distance des foyers, au grand axe IT.

Corollaire. II.

Usage de cette Proposition dans la Dioptrique.

282. On a reconnu par expérience qu'un rayon qui se réfracte au passage d'un milieu dans un autre plus ou moins dense, suit toujours une loix constante dans ses réfractions quelque soit l'angle d'incidence, ensorte que le sinus de cet angle est toujours dans un même rapport avec le sinus de l'angle rompu. Cela posé après avoir déterminé par expé-

rience, le rapport du ſinus de langle d'incidence, au ſinus de l'angle de réfraction, d'un rayon qui paſſe de l'air dans le verre; ſi l'on fait une hyperbole dont la diſtance *FD* des foyers, ait avec ſon axe *IT*, le rapport des des ſinus des angles de réfraction & d'incidence, qui eſt celui de 2 à 3, comme on ſçait par expérience, on pourra par le moien d'un hyperboloide de verre formé par la révolution de cette courbe autour de ſon axe, raſſembler en un même point tous les rayons paralléles qui viendroient tomber ſur la ſurface plane repréſentée par l'ordonnée *VS*, & réciproquement on pourra, par le moien du même corps faire enſorte que les rayons partis d'un même point *D*, hors de ce corps, & ſur le prolongement de ſon axe, ſortent du même corps, ſuivant des directions paralléles entr'elles, & perpendiculaires au plan du cercle qui ſert de baſe à cette portion d'hyperboloide.

Car le rayon *qP* venant à tomber perpendiculairement ſur le plan *VS*, comme on le ſuppoſe, arrive au point *P*, ſans ſouffrir aucune réfraction, & il y rencontre la courbe, comme s'il tomboit ſur un plan repréſenté par la tangente *PH*: l'angle *qPR* ou ſon égal *NPQ*, ſera donc l'angle d'incidence de ce rayon, l'angle *APN* ſera l'angle de réfraction dont le ſinus eſt *FM*, puiſque *APN*=*FPM*, (art. 278.), & que d'ailleurs ces ſinus ſont entr'eux dans le rapport des ſinus des

angles d'incidence & de réfraction convenables à un rayon qui sort du verre pour entrer dans l'air. Donc le rayon *Pq* sortira suivant la ligne *PD*, & comme on fera voir la même chose de tout autre rayon, il est démontré que tous les rayons paralléles & perpendiculaires au plan *VS*, se réuniront au point *D*.

Réciproquement si le point *D* placé sur l'axe est un point lumineux dont les rayons viennent rencontrer la surface convêxe du même corps, suivant des directions quelconques *DP*, les rayons se réfracteront à la rencontre de ce corps suivant des lignes *Pq* paralléles entr'elles, & à l'axe du même corps, car l'angle *APN* est l'angle d'incidence, dont le sinus est *FM*, & l'angle *QPN* ou *qPR* qui lui est opposé au sommet, est l'angle de réfraction dont le sinus est *QN*, puisque ces sinus sont entr'eux comme *FD* est à *IT* que l'on suppose avoir entr'eux le rapport des sinus, des angles d'incidence & de réfraction, convenables aux rayons qui passent de l'air dans le verre.

Corollaire. III.

283. Comme on peut faire une infinité d'hyperboles différentes, toujours telles que l'on ait *IT* : *FD* :: 2 à 3, il s'en suit que l'on peut avoir une infinité de verres hyperboloides, qui ayent les propriétés que nous venons de démontrer. On peut voir les différentes applications que fait M. Descartes de

ce principe dans traité livre de Dioptrique, il seroit à souhaiter que l'on put réduire en pratique une si belle théorie, il n'est pas douteux qu'on ne fût amplement dédomagé des difficultés que l'on rencontreroit dans l'éxécution.

DÉFINITION.

284. Si par l'une des extrémités *T* de l'axe *IT*, on éleve une droite *ATa* (*Fig.* 73) perpendiculaire à cet axe & dont les parties *AT* *aT* soient chacunes égales à la moitié du petit axe *MN*, les droites indéfinies *AC* *aC* qui passent par les extémités de cette ligne & le centre *C* sont nommés *asymptotes* des hyperboles opposées.

COROLLAIRE I.

285. Il suit de cette définition qu'ayant le centre des hyperboles le grand axe & les foyers on pourra aisément déterminer les asymptotes car la détermination de ces lignes dépendant du second axe *MN*; dèsque l'un est déterminé, elles le sont aussi. On a vu (*num.* 256) la maniere de trouver le second axe par la connoissance du premier & des foyers. Il ne sera pas plus difficile de trouver les asymptotes par la conoissance du petit axe & des foyers du grand axe, pourvu que le centre des hyperboles soit donné & le grand axe déterminé de position.

COROLLAIRE II.

286. Réciproquement connoissant les asymptotes d'une hyperbole on connoîtra aussi ses axes & ses foyers. Par exemple connoissant les asymptotes *CG CB* des hyperboles opposées on connoît dabord l'axe *IT*, parceque l'on suppose que les courbes sont données de position ; & que d'ailleurs cet axe divise l'angle des asymptotes en deux angles égaux. Le sommet *T* de l'axe *IT* étant donné, on a le second axe en menant par ce point la droite *ATa* perpendiculaire à l'axe, & terminée de part & d'autre aux asymptotes. Enfin on déterminera les foyers par la connoissance des deux axes comme au *numero* 256.

PROPOSITION XIV.

THÉOREME.

287. *Supposant les mêmes choses que dans la définition précedente, si l'on prolonge une ordonnée* PO *à l'hyperbole, jusqu'à ce qu'elle rencontre les asymptotes à droite & à gauche de l'axe en* P *&* en G, *je dis que l'on aura toujours* $GP \times PB = TA^2$. *C'est-à-dire que le second demi-axe est toujours moyen proportionel entre les distances d'un point quelconque de l'hyperbole aux asymptotes, ces distances prises sur le prolongement de l'ordonnée* PO.

DÉMONSTRATION.

Les lignes AT OB étant paralléles par construction, les triangles CTA COB sont semblables, donc on aura

$CO^2 : OB^2 :: CT^2 : TA^2$ & par la premiere proposi.

$CT^2 : TA^2 :: CO^2 - CT^2 : PO^2$.

donc $CO^2 : OB^2 :: CO^2 - CT^2 : PO^2$ & alter.

$CO^2 : CO^2 - CT^2 :: OB^2 : PO^2$. donc divid.

$CO^2 : CO^2 - CO^2 + CT^2 :: OB^2 : OB^2 - PO^2$.

réduisant & alternant $CO^2 : OB^2 :: CT^2 : OB^2 - PO^2 = GP \times PB$, par le Lêmme fondamental : mais nous venons de voir que ; $CO^2 : OB^2 :: CT^2 : TA^2$, donc $CT^2 : TA^2 :: CT^2 : GP \times PB$. D'où il suit que $TA^2 = GP \times PB$; C. Q. F. D.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

288. *Si par un point* P *de l'hyperbole* (Fig. 73) *on mene une droite* P g, *paralléle à l'axe* IT, *& terminée à l'autre asymptote* C g, *on aura* g P × P b, = C T²; *c'est-à-dire que le demi-axe* C T *est moyen proportionel, entre les distances d'un point* P *de l'hyperbole aux deux asymptotes, ces distances prises sur une ligne paralléle au grand axe.*

DÉMONSTRATION.

Par la définition des asymptotes, il est clair que la ligne bg, est coupée en deux également en K par le petit axe MN, prolongé

s'il est nécessaire, car l'angle KCg est égal à l'angle KCb de plus l'angle en K est droit dans les triangles CKb, & CKg, qui ont encore le côté commun CK. Donc ces triangles sont égaux en tout. Donc $gK = bK$: celà posé à cause des triangles semblables COB CKb, on a $OB^2 : CK^2 :: CO^2 : bK^2$, mais $CK^2 = PO^2$, & $CO^2 = PK^2$, à cause des paralléles PK CO, donc $BO^2 : PO^2 :: PK^2 : bK^2$, donc on aura *dividendo.* $BO^2 - PO^2 : BO^2 :: PK^2 - bK^2 : PK^2$, & par le Lemme fondamental, $BO^2 - PO^2 = GP \times BP$ & $PK^2 - bK^2 = gP \times Pb$, donc en substituant ces expressions, & alternant, on aura, $GP \times PB : gP \times Pb :: BO^2 : PK^2$ ou CO^2.

$$BO^2 : CO^2 :: TA^2 : CT^2.$$

donc $GP \times PB : gP \times Pb :: TA^2 : CT^2$, mais par la derniere proposition $GP \times PB = TA^2$, donc $gP \times Pb = CT^2$. C. Q. F. D.

PROPOSITION XVI.

THÉOREME.

289. *Je dis que l'hyperbole & son asymptote, s'approchent toujours de plus en plus, si loin qu'on prolonge l'une & l'autre, sans jamais pouvoir se toucher, & de plus, que l'on peut toujours trouver une ligne plus petite que la partie* PB *d'une ordonnée prolongée, comprise entre l'hyperbole & & l'asymptote, si petite que soit cette ligne.*

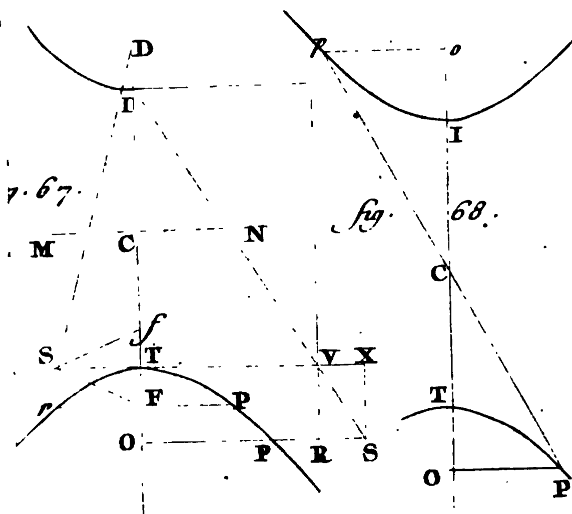
DÉMONSTRATION.

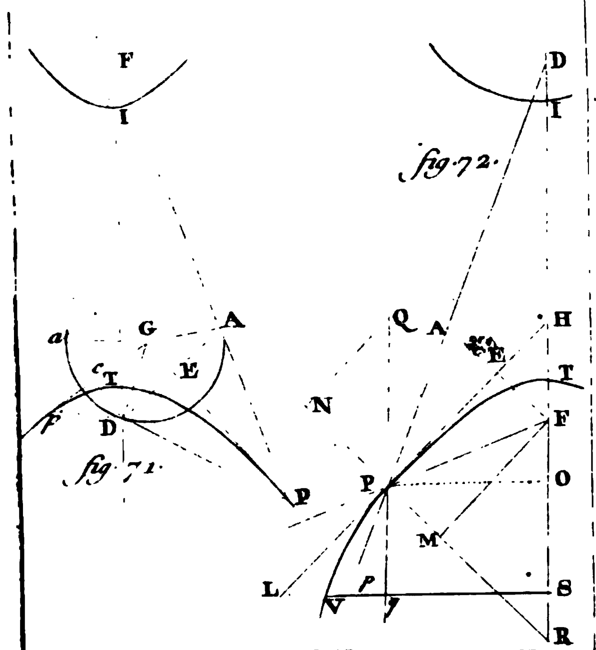
Par la propoſition 14 $GP \times PB = TA^2$, mais il eſt évident que GB augmente à meſure que que cette ligne s'éloigne du centre C, donc PB diminue, ſans cependant pouvoir jamais être nulle, car on auroit $GP \times PB = o$, ce qui ſeroit contre la même propoſition, d'où il ſuit évidemment que l'hyperbole & ſon aſymptote s'approchent continuellement ſans jamais pouvoir ſe toucher, & c'eſt ce que ſignifiie le mot d'aſymptote.

On peut encore prouver cette vérité directement par la proportion dont nous nous ſommes ſervis dans la 15eme propoſition.

Nous avons trouvé $CO^2 : BO^2 :: CO^2 - CT^2 : PO^2$, mais il eſt évident que CO^2 eſt plus grand que $CO^2 - CT^2$, donc auſſi BO^2 ſera toujours plus grand que PO^2 & partant BO ſera auſſi plus grand que PO, donc jamais le point P ne ſe confondra avec le point B. C. Q. F. D.

2°. Si petite que ſoit la ligne donnée, BP, on pourra toujours trouver un rectangle égal au quarré de TA, dont l'un des côtés ſoit plus petit que la ligne donnée, puiſqu'on ne ſuppoſe pas cette ligne infiniment petite ; & ayant appliqué perpendiculairement à l'axe dans l'angle des aſymptotes, la ligne égale à la ſomme des côtés de ce rectangle, le point P de diviſion des mêmes côtés, ſe trouvera ſur l'hyperbole, par la 14eme propoſition


fig. 67.
D
I
M
C
N
S
f
T
V
X
p
F
P
O
P
R
S
fig. 68.
o
I
C
T
O
P


F
I
D
I
fig. 72.
a
G
A
T
E
p
D
fig. 71.
P
Q
A
H
E
T
N
F
P
O
M
L
p
S
V
q
R

position, & d'ailleurs on a fait la ligne *P B*, plus petite que la ligne proposée. C. Q. F. 2° D.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

290. *Si par deux points* A, P *d'une même hyperbole, ou des deux hyperboles opposées* (Fig. 74. & 75.) *on mene deux lignes droites* PH AD, *& deux autres* PF AB *paralléles entr'elles, dont les unes soient terminées à une asymptote, & les autres à l'autre asymptote, je dis que le rectangle* $PF \times PH$ *est égal au rectangle* $AB \times AD$.

DÉMONSTRATION.

Ayant mené par les point *P A*, les perpendiculaires à l'axe *EPG*, *LAK* terminées aux asymptotes en *E*, *G*, *L*, *K* : à cause des paralléles *AD PH*, *AK PG*, *AB PF*, les triangles *EPF*, *LAB* ; *PGH*, *AKD* sont semblables : doncon aura pour les premiers triangles

$EP : PF :: AL : AB$, & à cause des seconds triangles. $PG : PH :: AK : AD$, en multipliant par ordre on aura ;

$EP \times PG : PF \times PH :: AL \times AK : AB \times AD$: mais par la proportion 17. $EP \times PG = AK \times AL$, puisque chacun de ces rectangles est égal au quarré de la même ligne, donc aussi le rectangle $PF \times PH = AB \times AD$.

REMARQUE.

Il est aisé de reconnoitre que la proposition est toujours vraie, soit que l'on prenne les deux



points *A*, *P* ſur une même hyperbole, comme dans la figure 74 ; ſoit que l'on prenne un point ſur une hyperbole & l'autre ſur ſon oppoſée, comme dans la figure 75, de maniere que la ligne *PH* ſe termine à l'aſymptote *CK* & la ligne *AD* à l'autre aſymptote *CG* ; ſoit enfin, que la droite *PH* ſe trouve renfermée dans l'angle *GCL* & la droite *AB* terminée à l'aſymptote *CB* (*fig.* 74.).

Corollaire I.

291. Si l'on imagine que les droites *PF AB* paralléles entr'elles, comme on l'a ſuppoſé, tournent autour des points *A P* avec des viteſſes égales ; elles conſerveront leur parallèliſme dans toutes les ſituations imaginables, & l'on aura toujours $AB \times AD = PF \times PH$: donc ſi ces lignes ſe confondent avec les droites *AD PH*, étant devenues *Ad Ph*, on aura encore $Ad \times AD = PH \times Ph$.

Corollaire II.

292. Si l'on imagine que l'une de ces lignes, *AD* par exemple (*Fig.* 75), ſe meuve parallélement à elle-même juſqu'à ce qu'ellle paſſe par le centre *C*, il eſt viſible que les points *D d* ſe raprocheront toujours l'un de l'autre & ſe confondront en un ſeul & même point au centre *C*, lorſque la ligne *AD* ſera devenue *MCN*. Donc puiſqu'on a toujours $PH \times Ph = AD \times Ad$, on aura $PH \times Ph = CM^2$. D'où il ſuit, que le quarré de la moitié d'un

demi diametre déterminé quelconque *MCN*, est égal à chacun des rectangles faits sur les distances d'un point *A* ou *P* de l'hyperbole, aux asymptotes ; ces distances prises sur une ligne *AD* ou *PH* paralléle au même diametre.

Corollaire III.

293. Soient prolongées les lignes *PH AD*, (*fig.* 75.) jusqu'à ce qu'elles rencontrent les hyperboles opposées dans les points *p*, *a* : on démontreroit comme dans les propositions précédentes, que les rectangles $aD \times ad$, $ph \times pH$ sont égaux entr'eux, & de plus *par le Corollaire précédent*, ces mêmes rectangles sont égaux chacun au quarré de *CM* ou de *CN* ; donc $Ph \times PH = pH \times ph$, & $AD \times Ad = ad \times aD$; donc les parties *Ad*, *aD*, *AD*, *ad* sont égales ainsi que les parties *Ph*, *pH*, *PH*, *ph*. Pour le prouver, on fera attention que puisque, *par le Corollaire présent*, on a $pH \times ph = Ph \times PH$, on aura aussi en mettant dans cette équation $pP - Ph$ à la place de *ph*, & $pP - pH$, à la place de *PH*; $pH \times pP - pH \times Ph = Ph \times Pp - pH \times Ph$. Ainsi ôtant de chaque membre le rectangle $pH \times Ph$, & divisant le reste par *Pp*, on aura $pH = Ph$ & partant $PH = ph$.

Corollaire IV.

294. Supposant toujours que les droites *AD PH* sont paralléles (*fig.* 74) qu'elles coupent l'hyperbole aux points *a p*, & qu'elles rencontrent les deux asymptotes aux points

D, *H*, *d*, *h*; on démontreroit comme dans la proposition précédente que $aD \times ad = Hp \times ph$. Si l'on imagine que l'une de ces paralléles *Dd*, se meuve toujours parallélement à elle-même du côté du centre *C*; il est évident que les points *A a*, s'approchent continuellement l'un de l'autre & qu'enfin ils se confondent en un seul point *O*, lorsque la ligne *Dd*, est devenue *MN*, & qu'elle ne rencontre plus l'hyperbole qu'en un seul point.

Corollaire V.

295. Puisque l'on a pour deux points quelconques; $AD \times Ad = PH \times Ph$, & $aD \times ad = pH \times ph$, on aura aussi $AD \times Ad$ ou $PH \times Ph = MO \times ON$, & par la même raison, $aD \times ad$ ou bien $pH \times ph = MO \times ON$. car l'on peut concevoir la ligne *MN*, comme une des sécantes paralléles, qui ne rencontre l'hyperbole que dans un point; & dans ce cas, le rectangle $AD \times Ad$, devient $MO \times ON$. Donc les rectangles $AD \times Ad$, $aD \times ad$; $PH \times Ph$, $pH \times ph$, sont égaux chacun à chacun, puisqu'ils sont chacun égaux au même rectangle $MO \times ON$.

Corollaire VI.

296. Il suit delà, que les lignes *Ad aD*, comprises entre la courbe & ses asymptotes, sont égales, ainsi que les lignes *Ph pH*. Donc aussi une ligne *MON* paralléle aux droites *Hh Dd*, & qui ne rencontre l'hyperbole que dans un point *O*, est coupée en deux parties

égales à ce point, & partant tous les rectangles $AD \times Ad$, $PH \times Ph$, $aD \times ad$, $pH \times ph$ sont égaux entr'eux & au quarré OM^2 de la moitié de MN.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

297. *Si une ligne droite* FH, (fig. 76.) *touche l'hyperbole en un point, je dis* 1°. *qu'elle rencontre les asymptotes en deux points* F H, 2°. *qu'elle est divisée en deux également au point touchant* P.

DÉMONSTRATION.

1°Soit menée par le point P l'ordonnée EPG à l'axe, terminée aux asymptotes en E & G. Si la tangente PH ne rencontre pas les asymptotes, elle sera nécessairement paralléle à l'une des deux: que ce soit à C G, s'il est possible ; nous avons vû (*art.* 289.), que l'on pourroit toujours trouver une ligne plus petite que PG, & qui lui étant paralléle soit comprise entre l'hyperbole & son asymptote ; le prolongement de cette ligne rencontrera nécessairement la ligne paralléle à l'asymptote au dedans de l'hyperbole. On ne peut donc supposer une tangente paralléle à une asymptote sans supposer en même tems qu'elle coupe l'hyperbole ; ce qui est contre la nature des tangentes. donc la ligne FH, rencontre les asymptotes aux points F H. C. Q. F. 1° D.

2°. Je dis de plus que le point touchant P, est au milieu de la ligne FH. Si ses deux parties

ne sont pas égales, il faut nécessairement que l'une soit plus grande que l'autre : imaginons que *PH* est plus grande que *PF*, & prenons $Hp=PF$; soit ensuite menée par le point *p* la droite *gpe* paralléle à *GPE*. A cause des parties égales *PF pH* & des paralléles *GE ge*, qui forment les triangles semblables *Hpg HPG*, *FPE Fpe*, on aura $pg : PG :: Hp : HP$ & $FP : Fp :: PE : pe$, & mettant à la place de *FP* & *Fp* leurs égales *Hp* & *HP* (*hypp.*), on aura $Hp : HP :: PE : pe$, donc à cause de la premiere proportion on aura $pg : PG :: PE : pe$, & prenant le produit des extrêmes & des moyens $PE \times PG = pe \times pg$, d'où il suit que le point *p* sera un point à l'hyperbole : la tangente rencontreroit donc l'hyperbole en deux points, si l'on suppose que le point *P*, n'est pas au milieu de *FH*. On démontrera de la même maniere que *FP* ne peut pas être plus grand que *PH*, sans une pareille contradiction, donc $FP = PH$. C. Q. F. 2° D.

Corolliare.

298. Il suit de là que la ligne *MN* (*fig.* 74) paralléle aux sécantes *AD PH*, que l'on suppose ne rencontrer l'hyperbole qu'en un seul point *O*, est tangente à ce point, car nous avons démontré (*art.* 296.) qu'elle est coupée en deux parties égales au point *O*. Donc les rectangles $AD \times Ad$, $PH \times Ph$; sont égaux au quarré de la moitié de la tangente à l'hyper-

bole supposée paralléle aux sécantes *Dd Hh*.

PROPOSITION XIX.

Théorème.

299. *Si des points* A P *d'une hyperbole, ou des hyperboles opposées* (fig. 77.) *on mene des droites* AB, AD, PF, PH *paralléles aux asymptotes; je dis que le parallélogramme* PFCH *est égal au parallélogramme* ABCD.

Demonstration.

Cette proposition n'est, pour ainsi dire, qu'un corollaire de la 17eme.: car, *par cette proposition*, puisque les lignes *AB AD* sont paralléles aux lignes *PF PH*, on aura cette égalité $AB \times AD = PF \times PH$, d'où l'on tire $AB : PF :: PH : AD$. Mais les angles en *A* & en *P* sont égaux, puisque les lignes qui les comprennent sont paralléles, donc ces parallélogrammes sont égaux, puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés réciproques. C. Q. F. D.

Corollaire I.

300. Puisque l'on a pour deux points quelconques *A*, *P* de l'hyperbole $AB \times AD = PF \times PH$; si par le point *M* extrémité de l'axe, on mene les paralléles aux asymptotes *ML Ml*, ces droites *ML Ml* seront égales; car il est aisé de voir que le triangle *MLC* est isocele, puisque l'axe divise l'angle des asymptotes en deux parties égales. Donc le rectangle $PF \times PH$

devient le quarré de *ML* ou *Ml*, lorsque le point *P* tombe sur le sommet *M* de l'hyperbole, & partant on aura cette équation pour exprimer la nature de l'hyperbole par rapport à ses asymptotes, $AB \times AD = ML^2$ ou bien $PF \times PH = ML^2$.

DÉFINITIONS.

301. Le quarré de la ligne *CL* ou de son égale *ML*, menée par le sommet de l'hyperbole parallélement à l'une des asymptotes, est appellé *puissance* de l'hyperbole. (*fig.* 77.)

302. Les parties *Cl*, *CF*, *CB* des asymptotes prises depuis le Centre *C*, sont appellées *abscisses* ou *coupées* des asymptotes.

303. Les lignes *Ml*, *PF*, *AB* paralléles à l'une des asymptotes, & terminées entre la courbe & l'autre asymptote, sont appellées *ordonnées aux asymptotes*, ou bien ordonnées extérieures de l'hyperbole par rapport à ses asymptotes.

COROLLAIRE II.

304. Il suit du corollaire premier & des définitions précédentes que l'on peut aisément trouver tant de points qu'on voudra d'une hyperbole ou des hyperboles opposées, par le moyen de la constante *ML*, & des indéterminées *CF*, *CB*, *PF*, *AB* : car puisque l'on a $PF \times PH = ML^2$, on aura aussi $PF \times CF = ML^2$, parceque les lignes *PH* & *CF* sont égales étant les côtés opposés du parallélogramme *PFCH*.

D'où l'on tire $CF : ML :: ML : PF$, ce qui fait voir que pour déterminer le point P de l'hyperbole sur la ligne indéterminée PF, paralléle à l'asymptote CH, il n'y a qu'a chercher une troisiême proportionelle à l'abscisse CF, & à la constante ML.

COROLLAIRE III.

305. Si l'on prolonge les lignes droites ML, Ml; mK, mk paralléles aux asymptotes, jusqu'à ce qu'elles se coupent aux points N n, on aura dans les angles opposés BCK LCD, deux parallélogrammes $CkLN$ $CKln$ qui seront évidemment égaux, & que l'on pourra regarder comme les puissances de deux nouvelles hyperboles que l'on décriroit dans ces angles, en cherchant des lignes comme ab, troisiêmes proportionelles à l'abscisse cb, & à la constante nK. Il est visible que l'on peut trouver une infinité de points tels que a, qui auront toujours la même propriété, & qui seront déterminés par la même équation $ab \times cb = nK^2$. Ces deux hyperboles sont précisément les mêmes courbes que celles que nous examinons. Elles peuvent se décrire de la même maniere que les premieres, & s'approchent comme elles continuellement de leurs asymptotes sans jamais pouvoir les toucher, puisque jamais la ligne ab ne peut être supposée égale à zéro, sans détruire l'équation qui exprime le rapport des abscisses aux ordonnées. Ces quatres

hyperboles ensembles sont appellées *hyperboles conjuguées* les unes aux autres. Il faut de plus remarquer, que la puissance des hyperboles opposées deux à deux, est la même pour les quatres hyperboles conjuguées, car il est évident, que les parallélogrammes *CLMI CKnl*, sont egaux, & que le lozange *CLMI* formé sur le côté de la puissance, est la huitiême partie du rectangle des deux axes.

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

306. *Si l'on a deux lignes droites* EG IK, *qui touchent une hyperbole ou deux hyperboles opposées* (fig. 78.) *je dis que les triangles* KCI ECG, *formés par les tangentes & les asymptotes, sont égaux.*

DÉMONSTRATION.

Par les points *AP* de contingence, soient menées les lignes *AD*, *AB*, *PF*, *PH* paralleles aux asymptotes & terminées aux mêmes lignes. Par *la proposition précédente*, les parallélogrammes *ABCD CFPH* sont égaux; mais parceque les tangentes sont coupées en deux également aux points d'attouchement *AP*, les lignes *CI CK* seront aussi divisées en deux également par les paralléles *PF PH* aux points *F H*, & les lignes *CG CE*, le seront pareillement aux points *BD*; d'où il suit que les parallélogrammes *PFCH ABCD*, sont moitiés

des triangles *CIK GGE*. Donc ces triangles sont égaux étant doubles de parallélogrammes égaux. C. Q. F. D.

Corollaire. I.

307. dans le cas où les points *A P* sont pris sur une même hyperbole, si des triangles égaux *CGE CKI*, l'on retranche le quadrilatere commun *CGOK*; les triangles *GOI KOE* qui resteront, seront aussi égaux; & dans le cas où les points *A P* sont pris sur des hyperboles opposées, si l'on prolonge les lignes *KI GE* jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en *o*, ajoutant aux deux triangles égaux *CKI CGE* le quadrilatère commun *CGoK*, les triangles *oKE oGI* qui résulteront de ces additions, seront encore égaux; & comme dans l'un & dans l'autre cas, les triangles ont un angle égal, il faut qu'ils ayent les côtés réciproques à l'entour de cet angle. On peut donc établir en général, que si deux tangentes à une hyperbole ou à des hyperboles opposées se rencontrent en un point *O* ou *o*, elles se couperont en parties proportionnelles, puisque l'on a *GO* : *OK* :: *OE* : *OI*.

Corollaire II.

308. Si l'on joint les point *K*, *G*, *E*, *I*, Les triangles *KGI*, *KGE* seront égaux, en ôtant des triangles égaux *CGE*, *CKI*, le triangle commun *CKG*; & dans le cas où les tan-

gentes appartiennent à des hyperboles opposées en ajoutant aux triangles égaux *CKI*, *CGE*, le triangle commun *GKC*; on aura aussi les triangles égaux *KGI*, *KGE*: mais ces triangles ont une base commune *KG*, dont ils sont compris entre paralléles; ainsi les droites *EI*, *KG* sont paralléles & donnent *CK*:*CG*::*KE*:*GI*, d'où il suit que si deux tangentes *EG*, *KI* rencontrent les asymptotes de l'hyperbole, elles les divisent en parties proportionelles.

PROPOSITION XXI.

Probléme.

309. *Un point quelconque* A *ou* P *étant donné sur l'hyperbole mener une tangente à ce point.*

Solution.

Par le point *A* soit menée la ligne *AD* paralléle à l'asymptote *CF*, & ensuite sur l'autre asymptote soit prise la partie *ED*=*DC*; la ligne *EAG* menée par le point *E* & le point *A*, sera la tangente demandée; car puisque *ED*=*DC*, & que les lignes *AD*, *CG* sont paralléles, on aura aussi *AG*=*AE*, d'où il suit que la ligne *EAG* est tangente en *A*, ce qui se démontreroit comme dans la dix-huitiéme proposition. (*art.* 297)

PROPOSITION XXII.

THÉOREME.

310. *Soit une ligne droite* BTA, (Fig. 79.) *qui touche une hyperbole & T & d'autres lignes droites* EF, IL *paralléles entr'elles, & à la tangente* BT; *si par le centre* C *& le point touchant* T, *on mene un diamétre* CT *prolongé infiniment au-dedans de l'Hyperbole, je dis que ce diamétre divise toutes les paralléles à la tangente en deux également.*

DÉMONSTRATION.

Ayant prolongé les droite *EF*, *IL* jusqu'à ce qu'elles rencontrent les asymptotes aux points *G*, *D*, *M*, *K*; il est évident que les droites *NG*, *ND*, *HM*, *HK*, sont égales; car puisque le diamétre *CT* divise la ligne *AB* en deux également, il divise aussi les paralléles à la tangente de la même maniere: donc si des lignes égales *ND*, *NG*, on ôte les parties égales *FD*, *GF*, & des autres lignes égales *HK*, *HM*, les égales *IK*, *ML*, on aura les lignes *EN*, *NF*, *HL*, *HI*; qui seront aussi égales. C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÉME.

311. *Si par le centre* C, *on mene une droite* MCN *paralléle à la tangente* BTA, *prolongee in-*

définiment de part & d'autre, (Fig. 80.) *& par les points* P, Q *de l'une des Hyperboles opposées, les droites* Pp, Qq *paralléles au diamétre* OT *qui passe par le point touchant* T; *je dis que toutes les paralléles* Pp, Qq *seront divisées en deux également par la droites* MCN.

DÉMONSTRATION.

Soit menée par le point *O* extrémité du diamétre *OT* la tangente *DOF* qui sera paralléle & égale à la tangente *BTA*, & par les points *D*, *F*, *A*, *B* les lignes *BF*, *AD*, qui seront aussi égales, paralléles au diamétre *OT*, & terminées aux asymptotes. Cela posé, il est évident que les lignes *BF*, *AD* sont divisées en deux parties égales, par la ligne *MCN* paralléle aux tangentes *AB*, *DF*, puisque l'on a *CO*=*CT*, par la nature des diamétres : donc on aura aussi *FN*=*BN* & *MD*=*AM*; & à cause des triangles semblables *CFB*, *CHh*, on aura encore *HS*=*hS*; donc en ajoutant les parties égales *pH*, *Ph* (*art.* 292.) les lignes *PS*, *pS* seront égales, d'où il suit que la ligne *Pp* est divisée en deux également par la droite *MCN*. On démontrera la même chose de toute autre ligne *Qq*; donc la ligne *MN* coupe en deux également toutes les paralléles au diamétre *OT* terminées aux deux hyperboles opposées. C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

312. *Si l'on prend sur la droite* MCN, *les parties* CM, CN *égales entr'elles & aux lignes* AT, TB, *je dis que les points* M, N, *seront aux Hyperboles conjuguées aux deux premieres.*

DÉMONSTRATION.

Par les points *O*, *M*, *T*, *N* soient menées les droites *OM*, *ON*, *TM*, *TN*, qui seront paralléles entr'elles, puisque les triangles *MCT*, *NCO* sont égaux en tout, ainsi queles triangles *OCM*, *TCN*. Il est clair que ces lignes seront coupées en deux également aux points *b*, *f*, *d*, *e* par les asymptotes, puisqu'elles sont des diagonales des parallélogrames *T N*, *O N*, *O M*, *T M*, dont les asymptotes sont aussi diagonales : donc les parallélogrammes *CbNf*, *CbTe* seront égaux, ainsi que les parallélogrammes *CdMe*, *CdOf*. Cela posé, puisque les point *O*, *T* sont aux hyperboles opposées, il faut que l'on ait $Cb \times bT$ ou $Cd \times do$, égale à la puissance de ces hyperboles : donc aussi $Cb \times bN$ ou $Cd \times dM$ est égale à la même puissance, donc les points *M N* sont aux hyperboles conjuguées aux premieres, puisque la puissance de ces hyperboles est la même que celle des précédentes (*art.* 305.) *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

313. Il suit de cette proposition que si par un point *L* de l'une des hyperboles opposées

on mene une droite Ll parallele à l'une des asymptotes, cette droite rencontrera l'hyperbole conjuguée à la premiere dans un point l, aussi éloigné du point E que le point L: car puisque le point L est à l'hyperbole LT, on a $CE \times EL = Ce \times eT$, & puisque le point l est supposé à l'une des hyperboles conjuguées, on a $CE \times El = Ce \times eM$, mais $Ce \times eT = Ce \times eM$ comme on vient de voir, donc $CE \times EL = CE \times El$, donc $EL = El$. On voit par là, qu'il est trés aisé de décrire les hyperboles conjuguées, lorsque l'on a les deux opposées avec leurs asymptotes.

DÉFINITION.

314. Les lignes OT, MN, ou, si l'on veut une tangente BTA, & le diametre OT, mené par le point touchant T, sont appellés *diametres conjugués* des hyperboles opposées.

COROLLAIRE II.

315. Il suit de la derniere proposition & de la définition précédente, que deux diametres conjugués OT, MN de deux hyperboles opposées, sont aussi diametres conjuguées des hyperboles conjuguées aux premieres, avec cette différence, que le diametre OT, qui est le premier diametre des hyperboles opposées, est le second de leurs conjuguées, & réciproquement le premier diametre MN des hyperboles conjuguées est le second des hyperboles opposées.

COROLLAIRE

COROLLAIRE. III.

316. Il suit encore de là, que les hyperboles conjuguées passent par les extrémités de tous les seconds diametres des hyperboles opposées; & réciproquement, que les hyperboles opposées passent par les extrémités de tous les seconds diametres de leurs conjuguées.

PROPOSITION XXV.

317. *Tous les parallélogrammes comme* A B F D, *formés sur deux diametres conjugués* OT, MN *& inscrits aux hyperboles, sont égaux entr'eux.* (*fig.* 80)

DÉMONSTRATION.

Le parallélogramme *CbTe* est la huitiéme partie du parallélogramme formé sur les deux diametres conjugués *OT*, *MN* & de plus il est égal au parallélogramme *Comn*, formé sur le côté *Cn* de la puissance de l'hyperbole, puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés réciproques. Ce dernier est aussi la huitiéme partie du rectangle des deux axes; (*art.* 305) donc le parallélogramme *A B F D*, inscrit aux hyperboles & formé sur deux diametres conjugués, est égal au rectangle des axes des mêmes hyperboles; on démontrera la même chose d'un parallélogramme formé sur deux diamettres conjugués quelconques; donc tous les parallélogrammes inscrits aux hyperboles & formés sur les diametres conjugués sont égaux entr'eux. C. Q. F. D.

PROPOSITION XXVI.

Théoreme.

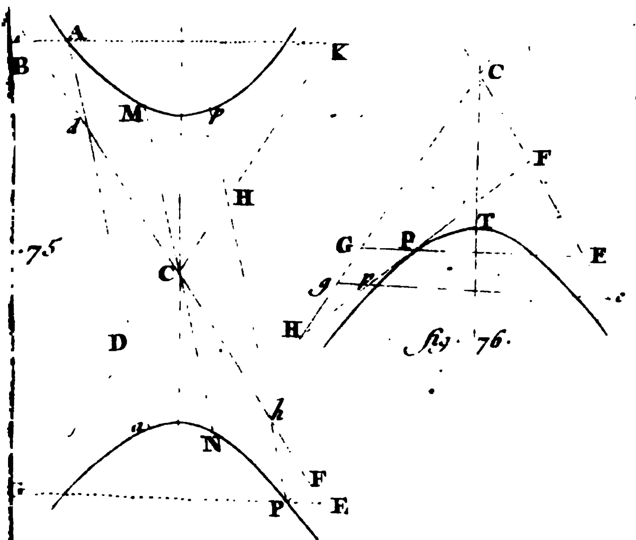
318. *Un parallèlogramme* ABFD *étant donné ; trouver les quatre hyperboles conjuguées auxquelles il peut être inſcrit.*

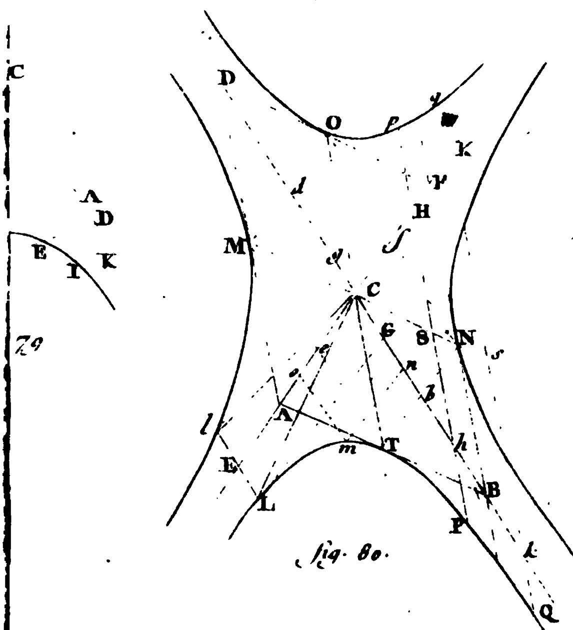
Solution.

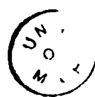
Par les angles oppoſés *A*, *F*; *B*, *D* du parallélogramme donné, on menera les diagonales *BD*, *AF* dont l'interſection donnera le centre *C* des hyperboles dont ces lignes ſeront les aſymptotes. Par le centre *C*, & les milieux *T*, *M* des droites *AB*, *AD*, on menera les droites *MCN*, *OCT* terminées aux côtés oppoſés du parallélogramme : ces lignes ſeront les diametres conjugués des hyperboles demandées dont on trouvera tant de points que l'on voudra par le moyen des points *T*, *O*, *M*, *N* & des aſymptotes *AF*, *BD* ; comme il ſera enſeigné dans le livre deladeſcription des ſections coniques. Cette ſolution ſuit évidemment de ce que l'on a démontré ci-devant.

Corollaire I.

319. Il ſuit de ce que nous venons de voir & de la ſolution précédente, qu'autour d'un parallélogramme donné, on ne peut point circonſcrire des hyperboles de différentes eſpéces : car on ne peut trouver qu'une ligne *Cx*, dont le quarré ſoit égal au rectangle de *Cb*×*bT*,


A
K
B
M
p
d
H
C
D
h
a
N
F
P
E
75
C
F
T
G
P
E
g
H
fig. 76.


C
A
D
E
I
K
79
D
O
p
q
K
d
H
M
C
G
S
N
s
o
e
n
A
l
T
m
h
E
B
L
P
k
Q
fig. 80.



ou dont le lozange soit égal au parallélogramme *CbTe*; qui est la huitieme partie du parallélogramme formé sur les diametres conjugués *OT*, *MN*.

COROLLAIRE II.

320. Il suit encore de cette proposition, que par quatre points *O*, *M*, *T*, *N* qui forment un parallélogramme, on ne peut faire passer qu'une espéce d'hyperboles conjuguées, dont on déterminera les diamétres, en prenant les diagonales *OT*, *MN*: cette vérité suit encore des mêmes principes.

DÉFINITIONS.

I.

321. Une droite *EN* parallele à une tangente *BTA*, (*fig.* 81) terminée d'une part à l'hyperbole & de l'autre au diametre *CT* qui passe par le point touchant *T*, est appellée *ordonnée* au diametre *OT*.

II.

322. Les parties *ON*, *TN* de ce diametre comprises entre les extrémités *O*, *N* de ce diametre & la rencontre de l'ordonnée *EN*, sont appellées *abscisses* ou *coupées* de ce diametre.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÊME.

323. *Le quarré d'une ordonnée* EN *à un diametre déterminé* OT (fig. 81) *est au rectangle*

$ON \times NT$ de ses abscisses ; comme le quarré de la tangente TA *paralléle à l'ordonnée* EN , *est au quarré du demi diametre* CT.

Démonstration.

A cause des paralléles AT, DN, les triangles CTA, CND sont semblables, & donnent $DN^2 : TA^2 :: CN^2 : CT^2$, donc *dividendo* on aura $DN^2 - TA^2 : TA^2 :: CN^2 - CT^2 : CT^2$, & (*art.* 292) $TA^2 = ED \times EG = \overline{DN + EN} \times \overline{DN - EN} = DN^2 - EN^2$, donc $DN^2 - TA^2 = DN^2 - DN^2 + EN^2$: mettant donc EN^2 à la place du premier terme de la derniere proportion, & $ON \times NT$ à la place de $CN^2 - CT^2$ qui lui est égal (*par le lemme fondamental*) on aura $EN^2 : TA^2 :: ON \times NT : CT^2$, & *alternando* $EN : ON \times NT :: TA^2 : CT^2$. C. Q. F. D.

Corollaire I.

324. Il suit de là que les quarrés de deux ordonnées EN, *en* à un même diametre sont entr'eux comme les rectangles de leurs abscisses; car on démontrera de la même maniere que $en^2 : On \times nT :: TA^2 : CT^2$, & on a pour l'ordonn. EN, $EN^2 : ON \times NT :: TA^2 : CT^2$, donc $EN^2 : en^2 :: ON \times NT : On \times nT$.

Corollaire. II.

325. Si les diametres conjugués sont égaux, ce qui ne peut arriver que dans l'hyperbole équilatére, comme on le démontrera par la

suite, les quarrés des ordonnées seront égaux aux produits de leurs abscisses; & partant chaque ordonnée sera moyenne proportionelle entre ses deux abscisses.

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÈME.

326. *Ayant mené par le centre* C *le diametre* CM *indéfini, parallele à la tangente* BA (*fig.* 81) *& conjugué au diametre* OT; *si par un point* E *de l'hyperbole, on mene une ordonnée* EL *parallele au premier diametre & terminée au second, je dis que l'on aura* $EL^2 : CM^2 + CL^2 :: CT^2 : CM^2$; *c'est-à-dire que le quarré d'une ordonnée à un second diametre, est à la somme des quarrés du demi diametre* CM *& de l'abscisse* CL; *comme le quarré du demi diametre* CT *est au quarré du demi-diametre qui lui est conjugué.*

DÉMONSTRATION.

Puisque l'on a *par la proposition précédente* $EN^2 : CN^2 - CT^2 :: TA^2$ ou $CM^2 : CT^2$, on aura aussi *altern.* $EN^2 : CM^2 :: CN^2 - CT^2 : CT^2$. *& componendo*
$EN^2 + CM^2 : CM^2 :: CN^2 - CT^2 + CT^2 : CT^2$, mais $EN^2 = CL^2$ & $CN^2 = EL^2$, donc *en subst.* $CL^2 + CM^2 : CM^2 :: EL^2 : CT^2$ ou bien $EL^2 : CT^2 :: CM^2 + CL^2 : CM^2$, & *alternando* $EL^2 : CM^2 + CL^2 :: CT^2 : CM^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE

327. Si l'hyperbole est équilatére, on aura $EL^2 = CM^2 + CL^2$; car nous démontrerons tout à l'heure que tous les diametres cojugués sont égaux entr'eux deux à deux. On peut encore déduire de cette proposition une maniere fort simple de décrire une hyperbole équilatére sur deux diametres conjugués égaux entr'eux & donnés de position, comme on le verra dans le livre de la description des Sections coniques.

DÉFINITION.

328. Si l'on fait cette proportion continue $OT:Mm::Mm:TP$, (*fig.* 82) cette troisieme proportionelle est appellée *parametre* du diametre qui occupe le premier terme de la proportion; d'où il suit que le rectangle d'un diametre par son parametre est égal au quarré de son conjugué.

COROLLAIRE

329. Il suit encore de là, que l'on a $OT^2 : Mm^2 :: OT : TP$, & en prenant le quart des deux premiers termes, $CT^2 : CM^2 :: OT:TP$, car puisque CT n'est que la moitié de OT & que CM n'est que la moitié de Mm, les quarrés CT^2, CM^2, seront le quart des quarrés OT^2, Mm^2; & d'ailleurs on sçait que dans toute proportion continue, le quarré du premier terme est au quarré du second, comme le premier au troisieme.

PROPOSITION. XXIX

THÉORÊME.

330. *Ayant élevé à l'extrémité du diametre* OT, *la perpendiculaire* TP *égale au parametre du même diametre, si l'on fait cette proportion* OT : TP :: ON : NS, *je dis que le quarré de l'ordonnée* EN *menée par le point* N *parallélement au diametre* MGm *conjugué au diametre* OT, *est égal au produit de son abscisse* TN *par la ligne* NS.

DÉMONSTRATION.

Par la proposition 17. on a cette proportion ; $EN^2 : ON \times TN :: CM^2 : CT^2$ & par la propriété du parametre, (*art.* 329.)

$CM^2 : CT^2 :: TP : OT$,

& par hypothése $TP : OT :: NS : ON$,

& en multipliant par la même ligne TN, $NS : ON :: NS \times TN : ON \times TN$,

donc $EN^2 : ON \times TN :: NS \times TN : ON \times TN$, donc $EN^2 = NS \times TN$.

Puisque les conséquents de cette derniere proportion sont égaux. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

331. Si par le point *P* extrémité du parametre on mene la ligne *RPV* parallele au diametre *OT*, & par le point S la ligne *SL* parallele à la même ligne : il est visible que les triangles *PLS*, *PVO* seront semblables, & partant les rectangles *OP*, *PS* doubles de ces triangles seront aussi semblables : d'où il suit que le quarré d'une ordonnée quelleconque *EN* à un diametre *OT*, surpasse le produit de son abscisse *TN* par le parametre *TP*

d'un rectangle *PS* semblable à celui du diametre par le même parametre ; & c'est de cette propriété commune à tous les diametres que la courbe dont nous traitons a été nommée *hyperbole*.

COROLLAIRE. I.

332. Si le parametre *PT* est égal au diametre *OT*, il s'en suivra, *par la formation du parametre*, que *TA* ou *CM* qui lui est égale, (*fig.* 81) sera égale à *CT*, & de plus que les asymptotes seront à angles droits ; ou, ce qui revient au même, que l'hyperbole est équilatére ; car la ligne *TG* parallele à l'asymptote *CB*, & menée par le point touchant *T* divise toujours *CA* en deux également, puisque le point *T*, est le milieu de *AB*. Si donc on suppose *AT*=*CT*, les triangles *CGT*, *AGT* seront égaux en tout, puisque les trois côtés de l'un sont égaux aux trois côtés de l'autre ; donc les angles de suite *CGT*, *AGT* sont égaux & valent chacun 90 dégrés : donc la ligne *TG* paralléle à l'asymptote *CB*, fait un angle droit avec l'asymptote *CA* ; donc enfin les asymptotes sont à angles droits & les hyperboles sont équilatéres.

COROLLAIRE II.

333. Il suit de là que dans une hyperbole qui n'a pas ses asymptotes à angles droits, on ne peut trouver deux diametres conjugués qui soient égaux. Car dans ce cas,

l'angle *AGT* ne peut jamais être droit, puisqu'il est toujours égal à celui des asymptotes : donc les triangles *CGT*, *AGT* qui ont des angles inégaux entre les côtés égaux *CG*, *AG* & le côté commun *TG*, auront toujours des bases inégales *CT*, *TA* : donc jamais on ne pourra trouver deux diametres conjugués égaux dans une hyperbole qui n'est pas équilatere ; & au contraire, jamais on ne trouvera dans une hyperbole équilatére des diametres conjugués inégaux. Toutes ces vérités dérivent du parallélisme des lignes *CB*, *AG* dans tous les cas imaginables.

REMARQUE.

L'hyperbole équilatére est par rapport au genre hyperbolique, ce que le cercle est au genre elliptique ; car l'hyperbole est la plus simple de toutes, comme le cercle est aussi la plus simple de toutes les ellipses. Cependant, le rapport n'est pas entierement parfait, car dans une ellipse quelleconque, on peut toujours déterminer deux diametres conjugués égaux entr'eux, dont les ordonnées ont conséquemment les propriétés des ordonnées au cercle ; aulieu que dans une hyperbole quelleconque, on ne peut trouver aucuns diametres conjugués dont l'équation avec leurs ordonnées, soit précisément la même que celle de l'hyperbole équilatére ; comme on vient de le démontrer dans les corollaires précédents.

PROPOSITION XXX.

THÉOREME.

334. *Ayant une tangente* DS *terminée en* S, (*fig.* 83.) *à la rencontre d'un diametre quelconque* CH, *si par le centre* C *des hyperboles conjuguées, on mene un diametre* LCl *paralléle à cette tangente; je dis que l'on aura cette proportion* $DS^2 : SR \times SH :: CL^2 : CH^2$, *c'est à dire que le quarré de la tangente* DS *est au rectangle des parties* SR, SH *du diametre qu'elle rencontre; comme le quarré du demi diametre* CL *paralléle à cette tangente, est au quarré du demi diamettre* CH, *coupé par la même ligne* DS.

DÉMONSTRATION.

Par l'origine *H* du diametre *CH*, soit menée parallélement à la tangente *DS* l'ordonnée *HK* au diametre *CD* qui passe par le point touchant *D*. Les triangles *CDS*, *CKH* seront évidemment semblables, à cause des paralléles *DS*, *HK*, & l'on aura . . . . . . $CH^2 : CS^2 :: KH^2 : DS^2$, donc $DS^2 = \frac{KH^2 \times CS^2}{CH^2}$; mais *KH* étant une ordonnée au diamétre *CD*, on aura (*art.* 323.) $KH^2 : CK^2 - CD^2 :: CL^2 : CD^2$ donc $KH^2 = \frac{CK^2 - CD^2}{CD^2} \times CL^2 = \frac{CH^2 - CS^2}{CS^2} \times CL^2$, comme il a été suffisamment expliqué dans l'ellipse (*art.* 204.). Donc en mettant cette valeur de KH^2 dans celle de DS^2, on aura $DS^2 = \frac{CS^2}{CH^2} \times \frac{CH^2}{CS^2} \times CL^2 - \frac{CS^2}{CH^2} \times \frac{CS^2}{CS^2} \times CL^2 = CL^2 - CS^2 \times \frac{CL^2}{CH^2} = \frac{CL^2 \times CH^2 - CS^2 \times CL^2}{CH^2} = \frac{CL^2}{CH^2} \times (CH^2 - CS^2)$

donc $DS^2 \times CH^2 = CL^2 \times (CH^2 - CS^2)$, d'où l'on l'on tire cette proportion $DS^2 : CH^2 - CS^2 :: CL^2 : CH^2$; mais *par le Lemme fondamental* $CH^2 - CS^2 = RS \times SH$, donc on aura $DS^2 : SR \times SH :: CL^2 : CH^2$. C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXI.

THÉORÊME.

335. *Si l'on prolonge la tangente* DS, *jusqu'à ce qu'elle rencontre un diamètre quelconque* Ch *en* f, *dans l'angle* GCF *adjacent à l'angle* GCI *dans lequel on a supposé qu'elle coupoit le diametre* CH, *on aura cette proportion*
$Df^2 : Cf^2 + Ch^2 :: CL^2 : Ch^2$.

DÉMONSTRATION.

Par le point *h* où le diamétre *Ch* rencontre une des hyperboles conjuguées à l'hyperbole *HD*, soit menée l'ordonnée *hk* au diametre *CD* qui passe pa le point touchant *D*: cette ligne sera paralléle à la tangente *DS* (*art.* 321.) & les triangles semblables *Ckh*, *CDf* donneront $Ch^2 : Cf^2 :: kh^2 : Df^2$, donc $Df^2 = \frac{kh^2 \times Cf^2}{Ch^2}$. Mais *kh* étant une ordonnée au second diamétre *CD* de l'hyperbole *Lh*, on aura (*num.* 326.) $kh^2 : CD^2 + Ck^2 :: CL^2 : CD^2$, donc $kh^2 = \frac{CD^2 + Ck^2}{CD^2} \times CL^2 = \frac{Cf^2 + Ch^2}{Cf^2} \times CL^2$: (*voyez le numero* 204 *de l'ellipse.*) donc en substituant cette valeur dans celle de Df^2, on aura $Df^2 = \frac{Cf^2}{Ch^2} \times CL^2 + \frac{Cf^2 \times Ch^2}{Ch^2 \times Cf^2} \times CL^2 = \frac{Cf^2 \times CL^2}{Ch^2} +$

$CL^2 = \frac{Cs^2 + Ch^2}{Ch^2} \times CL^2$ d'où l'on tire cette proportion $Ds^2 : Cs^2 + Ch^2 :: CL^2 : Ch^2$. C. Q. F. D.

Corollaire. I.

336. Il suit des deux propositions précédentes, que l'on peut regarder comme un seul & même théorême, que si une tangente quelconque *DS* rencontre un diamétre quelconque *CH* dans un point *H* ou *h* (*fig.* 84, 85, 86, 87, 88, 86) on aura toujours cette proportion $DS^2 : CH^2 \mp CS^2 :: CL^2 : CH^2$ c'est-à-dire, que *le quarré d'une tangente* D S *prise depuis le point touchant jusqu'à la rencontre d'un diametre quelconque; est à la différence, ou à la somme des quarrés de ce demi diametre & de la distance du centre* C *au point de rencontre* S; *comme le quarré du demi diametre parallèle à cette tangente, est au quarré du même demi diametre coupé par la tangente; la différence, lorsque le diametre* CH *appartient aux hyperboles auxquelles* DS *est tangente; & la somme, lorsqu'il se termine aux hyperboles conjuguées à celle à laquelle on a menée la tangente.*

Corollaire II.

337. Si les diametres *CH*, *CL* sont égaux, la tangente sera moyenne proportionelle, entre les parties *RS*, *SH* dans le cas de la proposition trentieme, & dans celui de la trente-uniéme, on aura $CH^2 + CS^2 = DS^2$. D'où il suit qu'avec la tangente *DS* & les parties *CH*, *CS*, on pourra toujours former un triangle rectangle.

PROPOSITION XXXII.

THÉORÊME.

338. *Si deux lignes droites* AB, MN *terminées à une même hyperbole*, (*fig.* 84. & 85.) *ou a des hyperboles opposées*, (*fig.* 86, 87, 88) *se rencontrent en un point* O *audedans ou audehors de ces hyperboles*, & *que par le centre* C, *on mene parallélement aux mêmes sécantes les diametres* CL, CE; *je dis que l'on aura toujours* AO×OB : MO×ON :: CL²:CE², *c'est-à-dire que les produits de deux sécantes quellesconques intérieures ou extérieures, sont entr'eux comme les quarrés des diametres qui leur sont paralleles.*

DÉMONSTRATION.

Nous allons d'abord démontrer cette proposition sur les figures 84 & 85, nous avertirons des changemens qu'il y a à faire sur les autres figures pour trouver la démonstration du théorême, qui est à peu près la même dans tous les cas imaginables.

Par le point *F* milieu de la sécante *AB* & le centre *C*, soit mené le diametre *CDF*, au point *D* origine du diametre *CD*, soit menée la tangente *DS* paralléle à son conjugué *CL*, & terminée en *S* au diametre qui passe par le point O d'intersection des sécantes. Cela posé, puisque la ligne *AB* est divisée en deux parties égales en *F* & en deux parties inégales en O, on aura (*par le lemme fond.*)

$AO \times OB = BF^2 - FO^2$ (*fig.* 84.) ou $FO^2 - BF^2$ (*fig.* 85.) : BF étant une ordonnée au diametre CD, on aura $BF^2 : CF^2 - CD^2 :: CL^2 : CD^2$, donc $BF^2 = \frac{CF^2 - CD^2}{CD^2} \times CL^2 = \frac{CO^2 - CS^2}{CS^2} \times CL^2$ (*num* 206 *de l'ellipse*) ou $BF^2 = \frac{CO^2 \times CL^2}{CS^2} - CL^2$

Pour avoir OF, on ſe ſervira des triangles ſemblables CFO CDS qui donnent $CS^2 : CO^2 :: DS^2$ ou (*n.* 334.) $\frac{CL^2}{CH^2} \times (CH^2 - CS^2) : FO^2$ d'où l'on tire $FO^2 = \frac{CO^2 \times CL^2}{CS^2} - \frac{CO^2 \times CL^2}{CH^2}$, donc $BF^2 - FO^2 = \frac{CO^2 \times CL^2}{CS^2} - CL^2 - \frac{CO^2 \times CL^2}{CS^2} + \frac{CO^2 \times CL^2}{CH^2}$, ou en effacant ce qui ſe détruit, & réduiſant CL^2 à la même dénomination que le dernier terme, $BF^2 - FO^2$ ou $AO \times OB = \frac{CO^2 - CH^2}{CH^2} \times CL^2$. Si l'on avoit retranché BF^2 de FO^2, on auroit eu $AO \times OB = \frac{CH^2 - CO^2}{CH^2} \times CL^2$, d'où l'on déduit cette proportion pour les ſécantes intérieures & extérieures, $AO \times OB : CL^2 :: CH^2 - CO^2$ ou $CO^2 - CH^2 = RO \times OH : CH^2$. on démontrera de la même maniere que $MO \times ON : CE^2 :: RO \times OH : CH^2$ donc $AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$. C. Q. F. D.

OBSERVATIONS.

339. 1° Si l'une des ſécantes MN (*fig.* 86.) eſt terminée à une ſeule hyperbole, & rencontrée au-dedans de cette hyperbole par une droite AB, terminée à cette même hyperbole & à ſon oppoſée : comme alors la tangente DS parallele à la ſécante AB, vient couper un des ſeconds diametres de l'hyperbole à laquelle elle eſt tangente, on aura (*art.* 336)

$DS^2 = \frac{CH^2+CS^2}{CH^2} \times CL^2$. On se servira de même de cette valeur pour trouver FO^2 par le moyen des triangles semblables CDS, CFO ; de plus comme BF est une ordonnée extérieure, on aura (*art* 326) $BF^2 : CD^2 + CF^2 :: CL^2 : CD^2$, donc $BF^2 = \frac{CD^2+CF^2}{CD^2} \times CL^2$; ainsi en se servant des proportionelles CS^2 & CO^2, il faudra prendre pour la valeur de BF^2, $\frac{CS^2+CO^2}{CS^2} \times CL^2$, & l'on trouvera par ce moyen $AO \times OB : CL^2 :: RO \times OH : CH^2$. Pour la sécante MN, on trouvera la valeur de MG^2 & de GO^2 comme dans le cas de la figure 84.

2°. Si les sécantes AB, MN appartiennent à des hyperboles opposées, & se coupent au dehors des mêmes hyperboles; (*fig.* 87) ayant menée la tangente DS qui rencontre un des seconds diametres de l'hyperbole BDA, on aura $DS^2 = \frac{CH^2+CS^2}{CH^2} \times CL^2$ (*num* 336) dont on se servira de la même maniere pour trouver le quarré de OF, & l'on trouvera $OF^2 - BF^2$, ou $AO \times OB : CL^2 :: CO^2 + CH^2 : CH^2$, aulieu que dans les figures précédentes on avoit $CO^2 - CH^2$ ou $CH^2 - CO^2$. On trouvera de même en suivant les mêmes observations, $GO^2 - GN^2$, ou $MO \times ON : CE^2 :: CO^2 + CH^2 : CH^2$ d'où l'on conclura encore que
$AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$.

3°. Si les sécantes AB, MN (*fig.* 88) sont terminées l'une & l'autre à des hyperboles opposées ; par le point D extrémité du diametre qui divise AB en deux également en F,

on menera la tangente DS, terminée en S au diametre CH qui passe par le point d'intersection O; & l'on aura comme dans les figures 84 & 85, $DS^2 = \frac{CH^2 - CS^2}{CH^2} \times CL^2$: après avoir trouvé par son moyen la valeur de OF^2 & l'expression de BF^2 ordonnée extérieure à l'une des hyperboles, en suivant ce qui a été dit dans la premiere observation ; on aura $AO \times OB : CL^2 :: CO^2 + CH^2 : CH^2$, on trouvera de la même maniere $MO \times ON : CE^2 :: CO^2 + CH^2 : CH^2$, donc on aura encore dans ce cas $AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$

4°. Si l'une des sécantes AB (*fig.* 89) est terminée à deux hyperboles opposées & la sécante MN à ses deux conjuguées, on ne pourra plus trouver la proportion énoncée au théorême; mais après avoir divisé les sécantes AB, MN en deux parties egales aux points F, G, & tiré les diametres CL, CE paralleles à ces mêmes lignes, on auroit cette autre analogie $BF^2 - FO^2 : MG^2 + GO^2 :: CL^2 : CE^2$; car on trouvera en suivant toutes les observations précédentes, $BF^2 - FO^2 : CL^2 :: CH^2 + CO^2 : CH^2$ & cette autre proportion . . . $MG^2 + HO^2 : CE^2 :: CH^2 + CO^2 : CH^2$, d'où il suit qu'on aura $BF^2 - FO^2 : MG^2 + GO^2 :: CL^2 : CE^2$.

Corollaire I

Si l'on suppose que les sécantes AB, MN (*fig.* 84) se meuvent parallelement à elles-mêmes jusqu'à ce qu'elles deviennent tangentes

en

en I & D, à l'origine des diametres qui les divisent en deux également, & qu'elles se coupent dans un point T; les rectangles $AO \times OB$, $MO \times ON$ deviendront les quarrés des tangentes IT, DT: on aura donc $DT^2 : IT^2 :: CL^2 : CE^2$, mais nous avons, *par la proposition précédente*, $AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$; on aura donc aussi pour les sécantes intérieures & extérieures, $AO \times OB : MO \times ON :: DT^2 : IT^2$; c'est-à-dire, que *les rectangles de deux sécantes quelconques* AB, MN *sont entr'eux comme les quarrés des tangentes* DT, IT *qui leur sont paralléles, prises depuis l'origine des diametres qui divisent les parties intérieures de ces sécantes en deux également, jusqu'au point* T *où elles se rencontrent.* D'où l'on voit que cette propriété convient à toutes les sections coniques *par les articles* 83 *de la parabole* & 207 *de l'ellipse.*

COROLLAIRE II.

391. Si l'une des sécantes AB par exemple, (*fig.* 85 & 87) se meut parallélement à elle-même jusqu'à ce qu'elle devienne tangente en D; il est évident que les points A, B s'approchent toujours l'un de l'autre, & qu'enfin ils se confondent en un seul & même point D: alors le rectangle $AO \times OB$, devient le quarré de Do; on aura donc $Do^2 : Mo \times oN :: CL^2 : CE^2$. D'où il suit que si les diametres CL, CE sont égaux entr'eux

la tangente *Do* sera moyenne proportionelle entre la sécante entiere & la partie extérieure : Ainsi cette propriété, qui est une des principales du cercle, est commune à toutes les sections coniques ; & elle n'est universelle dans le cercle, que parce que tous les diametres sont égaux entr'eux.

Corollaire. III.

342. Si l'on imagine que l'une des sécantes comme *AB* (*fig.* 86) passe par le centre, & devienne un diametre qui divise l'autre sécante *MN* en deux parties égales ; cette ligne *MN* deviendra une double ordonnée au diametre qui la divise en deux également ; le rectangle $AO \times OB$ deviendra celui des abscisses ; le rectangle $MO \times ON$ deviendra le quarré de l'ordonnée ; le diametre *CE* paralléle à *MN*, sera conjugué à celui qui divise *MN* en deux parties égales ; & le diametre paralléle à ce dernier, sera ce diametre lui-même : on aura donc ; *le quarré dune ordonnée à un diametre quelconque est au produit de ses abscisses, comme le quarré du diametre paralléle à l'ordonée, est au quarré de son conjugué.*

Corollaire IV.

343. Nous avons vû par le dernier article des observations du *num.* 339, que l'on a (*fig.* 89) $BF^2 - FO^2 : MG^2 + GO^2 :: CL^2 : CE^2$. Si l'on suppose que la ligne *MN* passe par

le centre & divise la droite *AB* en deux également; cette ligne *AB* sera une double ordonnée à la ligne *MN* devenue diametre: comme la partie *FO* est égale à zero, on aura BF^2 à la place de $BF^2 - FO^2$; les parties *MO* & *ON*, deviendront les parties *DF*, *Fd*, & la somme des quarrés des lignes *MG*, *GO* sera celle des quarrés CD^2, CF^2; enfin le diametre parallèle à *CD* sera *CD* lui-même; le diametre *CL* parallèle à *AB* sera *CL* conjugué à *CD*: on aura donc $BF^2 : CD^2 + CF^2 :: CL^2 : CD^2$; d'où il suit que cette derniere observation renferme la proposition la plus générale que l'on puisse donner sur l'hyperbole, en la déterminant par des ordonnées extérieures à cette courbe. On voit de même, dans la figure 86, ce que l'on peut établir de plus général sur les ordonnées intérieures à la même courbe; puisqu'en simplifiant les deux rapports contenus dans cette proportion, on retrouve les équations aux premiers diametres dont nous sommes partis.

COROLLAIRE V.

344. Il suit encore du dernier article des observations du même nº. 339, que si deux lignes droites *AB*, *mn*, (*fig.* 89) se coupent dans un point *o* sur l'une des asymptotes, & se terminent aux hyperboles opposées; on aura encore cette proportion $Ao \times oB : mo \times on :: CL^2 : CE^2$: car on peut considérer l'asymptote *Cs* comme un diametre commun à chacune des hyperboles

opposées; & l'on voit aisément que les rectangles $AoxoB$, $moxon$, ont avec les quarrés des diametres CL, CE qui leur sont paralléles, le même rapport qui se trouve entre le rectangle $ohxoi$ des parties de l'asymptote & le quarré ch^2 de la même asymptote prise depuis le centre jusqu'à l'infini; où l'on doit supposer le point h. Comme ces raisons pourroient paroître un peu trop abstraites, nous allons en donner une démonstration complette.

Nous supposerons que par les points F, g milieux des sécantes AB, mn, on a mené les diametres CFD, CgI, & par le point D origine du diametre FD la tangente Ds paralléle à la sécante AB, terminée en s à l'asymptote Ds; nous supposerons de plus, comme dans la proposition précédente, les diametres CL, CE terminés aux hyperboles & paralléles aux sécantes proposées.

. En considérant l'asymptote Ch comme le dernier de tous les diametres possibles, & supposant le point h à l'infini; puisque nous avons démontré que l'on avoit en général pour une tangente quelconque terminée à un diametre CH; $DS^2 : CH^2 - CS^2 :: CL^2 : CH^2$, cette proportion se trouvera encore vraye dans le cas que nous supposons; c'est-à-dire que l'on aura $Ds^2 : Ch^2 - Cs^2 :: CL^2 : Ch^2$. Dans cette proportion, je fais attention que Ch étant une grandeur infinie en comparaison de Cs qui est une grandeur finie, cette quantité devient nulle vis-à-vis de Ch; donc la proportion

se réduit à celle-ci $Dſ^2 : Ch^2 :: CL^2 : Ch^2$, mais $Ch^2 = Ch^2$, donc aussi $Dſ^2 = CL^2$, c'est ce que l'on sçait déja par l'article 298. BF étant une ordonnée extérieure à l'hyperbole BI, on aura $BF^2 : CF^2 + CD^2 :: CL^2 : CD^2$, donc $BF^2 = \frac{CF^2 + CD^2}{CD^2} \times CL^2 = \frac{Co^2 + Cſ^2}{Cſ^2} \times CL^2$, par les mêmes raisons que nous avons donné ci-devant ; & à cause des triangles semblables $CDſ$, CFo on aura $Cſ^2 : Co^2 :: Dſ^2$ ou $CL^2 : Fo^2 = \frac{CL^2 \times Co^2}{Cſ^2}$; donc $BF^2 - Fo^2$ ou $Ao \times oB = \frac{Co^2 \times CL^2}{Cſ^2} + CL^2 - \frac{CL^2 \times Co^2}{Cſ^2} = CL^2$: on fera voir de même que $mo \times on = CE^2$, donc on aura $Ao \times oB : mo \times on :: CL^2 : CE^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE VI.

345. Il suit du dernier corollaire, que cette proposition renferme nonseulement les propriétés des hyperboles par rapport aux diametres, mais encore celles des mêmes hyperboles considérées entre leurs asymptotes; ensorte qu'elle réunit pour ainsi-dire, en elle-même, toutes les propriétés des hyperboles, quelque soit l'angle des asymptotes.

N. B. *On auroit pû demontrer le corollaire V. sans aucun calcul, en se servant de la prop. 17. Mais comme cette proposition n'est elle même qu'un cas particulier des deux précédentes, j'ai crû qu'on verroit avec plaisir une démonstration directe de cette propriété des asymptotes considérées comme des diametres communs aux hyperboles conjuguées.*

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÊME.

346. *Si deux lignes droites* IT, RS *terminées*

aux asymptotes (fig. 90) se coupent dans un point O, *au-dedans des hyperboles, je dis que l'on aura cette proportion* $IO \times OT : RO \times OS :: CL^2 : CE^2$, *en supposant que* CL, CE *sont des diametres paralléles à ces sécantes, que nous apppellerons sécantes* asymptotiques, *pour les distinguer des sécantes* AB, MN *terminées aux hyperboles, & que l'on peut nommer des sécantes* hyperboliques.

DÉMONSTRATION.

Par le point A, où l'une des sécantes rencontre l'hyperbole, soit menée une ligne PAQ, paralléle a l'autre sécante RS; les triangles IAP, IOR seront semblables, ainsi que les triangles AQT, OST, à cause des paralléles PQ, RS: ces triangles donnent les deux proportions suivantes. Les premiers donnent $IA:IO::AP:RO$. & les seconds $AT:OT::AQ:OS$. donc *en les multipliant par ordre*, on aura $IA \times AT : IO \times OT :: AP \times AQ : RO \times OS$ mais $IA \times AT = DK^2$, en supposant que DK est tangente au point D origine du diametre CF qui divise IT en deux également au point F; & de même $AP \times AQ = NH^2$, en supposant les mêmes conditions pour NH: de plus, (*art.* 314) les tangentes DK, NH sont égales aux demidiametres CL, CE paralléles à ces tangentes, & conjugués aux diametres CD, CN; on aura donc $IA \times AT = CL^2$ & $AP \times AQ = CE^2$ donc en mettant ces quarrés à la place des rectangles qui leur sont égaux, on aura $IO \times OT : RO \times OS :: CL^2 : CE^2$. C. Q. F. D.

Ce feroit la même chose, si l'une des sécantes IT étoit disposée de maniere qu'elle rencontrât les deux hyperboles opposées ; car les triangles IAP, IOR, AQT, seront toujours semblables, & donneront les mêmes proportions.

COROLLAIRE I.

347. Les parties AB, MN des sécantes IT, RS étant des sécantes hyperboliques, on aura *par la proposition précédente* . . . . . $AO \times OB : MO \times ON :: CL^2 : CE^2$, & nous avons $IO \times OT : RO \times OS :: CL^2 : CE^2$; donc on aura $AO \times OB : MO \times ON :: IO \times OT : RO \times OS$. D'où il suit que les produits de deux sécantes hyperboliques quelconques sont entr'eux comme les produits de deux sécantes asymptotiques paralléles aux premieres.

COROLLAIRE II.

348. Si les deux sécantes IT, RS devenues toutes deux tangentes, l'une en D & l'autre en F (*fig.* 91) se coupent dans un point O, on aura toujours . . . . $IO \times OT : RO \times OS :: CE^2 : CL^2 :: FT^2 : DS^2$, puisque les diametres CE, CL sont égaux aux tangentes FT, DS prises depuis le point d'attouchement jusqu'à l'asymptote. D'où l'on voit que les propriétés des sécantes asymptotiques sont les mêmes que celles des sécantes hyperboliques. On peut démontrer ce corollaire directement de la même maniere que l'on a démontré la

proposition. Par le point F milieu de la tangente IT, soit menée la ligne PFQ parallèle à la tangente RS. Les triangles IOR, IFP sont semblables, ainsi que les triangles TOS, TFQ : les premiers donnent la proportion suivante $IO : OR :: IF : FP$, & les seconds donnent celle-ci $QT : OS :: FT : FQ$; donc *en multipliant par ordre*, $IO \times OT : OR \times OS :: IF \times FT : FP \times FQ$; mais $IF \times FT = FT^2$, puisque la tangente est divisée en deux également en F, & (*num.* 298.) $FP \times FQ = DS^2$, donc *en substituant* on aura $IO \times OT : OR \times OS :: FT^2 : DS^2 :: CE^2 : CL^2$.

Corollaire III.

349. Puisque les tangentes IT, RS sont divisées en deux également aux points F, D & en deux parties inégales au point O ; on aura *par le Lem. fond.*, $IO \times OT = FT^2 - FO^2$, & $RO \times OS = DR^2 - DO^2$. donc en substituant ces valeurs dans la derniere proportion du corollaire précédent, on aura $FT^2 - FO^2 : DR^2 - DO^2 :: FT^2 : DS^2$ ou DR^2 ; d'ou l'on déduit en faisant un *alternando* & ensuite un *detrahendo* $FT^2 : FT^2 - FT^2 + FO^2 :: DR^2 : DR^2 - DR^2 + DO^2$, réduisant & tirant les racines $FT : FO :: DR : DO$. & *componendo* : $FT + FO : FO :: DR + DO : DO$, & *dividendo*, $FT - FO : FO :: DR - DO : DO$, donc puisque les conséquents de ces deux proportions sont égaux ; on aura ...... $FT + FO : FT - FO :: DR + DO : DR - DO$, *reduis.* $IO : OT :: OS : OR$; mais les triangles OTS, ORI, ont un angle égal en O,

compris entre côtés réciproques ; donc ils sont égaux : donc en leur ajoutant le quadrilatere *CROT* ; les triangles *CRS*, *CTI* seront égaux ; d'où il suit que les triangles formés par deux tangentes quelconques & les asymptotes sont toujours égaux entr'eux. C'est ce que nous avons deja démontré (*num.* 306). Si les tangentes appartiennent à des hyperboles opposées, il faudra des triangles égaux *oRI*, *oTS* ôter le quadrilatere commun *TCRo*, pour en conclure l'égalité des triangles *CTI*, *CRS*. Il suit encore de cette proposition, ou du corollaire présent, que tous les parallélogrammes inscrits aux hyperboles & formés sur deux diametres conjugués, sont égaux entr'eux, & au rectangle des deux axes.

REMARQUE.

350. On pourroit encore déduire de cette proposition beaucoup d'autres corollaires & en faire usage pour trouver une hyperbole qui passât par plusieurs points donnés & dont les diametres seroient entr'eux dans des rapports déterminés ; mais comme nous avons déja fait voir sur l'ellipse l'usage de cette proposition, dans la solution des problêmes de ce genre, nous ne les répéterons pas ici, d'autant que nous avons encore à examiner d'autres propriétés de l'hyperbole, qui ne sont pas moins curieuses que ce qu'on auroit pu dire sur cette matiere, & qu'un plus long détail paroîtroit peut-être inutile dans des éléments.

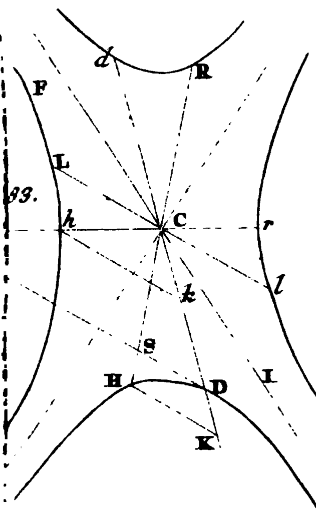
PROPOSITION XXXIV.

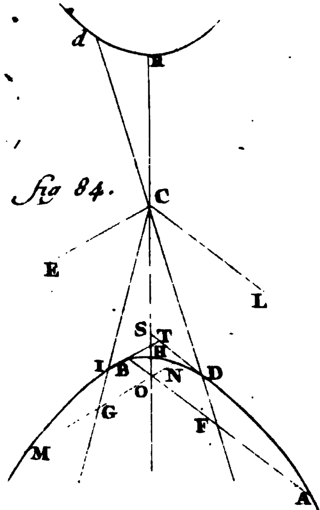
THEOREME.

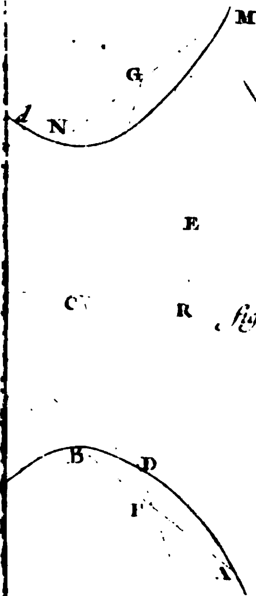
351. *Si par un point* P *de l'une des hyperboles opposées, on mene une ordonnée* PO *à un diametre de la même hyperbole, & une tangente* PH *qui rencontre ce diametre en* H, *je dis que l'on aura toujours cette proportion* CO : CT::CT : CH.

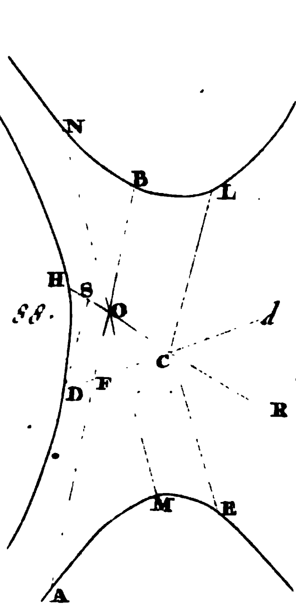
DÉMONSTRATION.

Soit prolongée l'ordonnée *PO*, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'hyperbole en *p*; par le point *T* origine du diametre *CT*, soit menée l'ordonnée *TG* aussi prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre l'hyperbole en *t*, & par le même point *T* soit menée la tangente *TK*, terminée au diametre *CP* en *K*. Cette tangente coupera la tangente *PH* dans un point *S*; les lignes *Tt*, *Pp* étant des sécantes intérieures à l'hyperbole qui se coupent en *D*, on aura (*art.* 340) $GT^2 - GD^2$ ou $TD \times Dt : PO^2 - OD^2$ ou $PD \times Dp :: PS^2 : TS^2$; mais les lignes *PS*, *TD* étant paralléles, ainsi que les lignes *TS*, *PD*; *DPST* est un parallélogramme: donc $PS = TD$ & $TS = PD$, on aura donc $DT \times Dt : PD \times Dp :: DT^2 : PD^2$, & divisant les deux antécédents par *DT*, & les deux conséquents par *PD*, $Dt : Dp :: DT : PD$, donc $Dt + DT : Dp + DP :: DT : PD$ ou $tT : Pp :: DT : PD$ & prenant la moitié des deux premiers termes $TG : PO :: DT : PD$, & *alternando* $TG : DT :: PO : PD$, & *dividendo*


d
R
F
L
83.
h
C
r
l
k
S
I
H
D
K


d
R
fig 84.
C
E
L
S
T
H
I
B
N
D
O
G
F
M
A


M
G
d
N
E
C
R
B
D
F
A


N
B
L
H
S
O
fig. 88.
d
C
D
F
R
M
E
A

$TG-DT : DT :: PO-PD : PD$; en réduisant on trouve $DG : DT :: DO : PD$, d'où il suit que les triangles PDG, TDO sont égaux, puisqu'ils ont un angle égal D, compris entre côtés réciproques; donc en leur ajoûtant le triangle commun DOG, les triangles POG, TOG apuyés sur même base OG, seront égaux; donc ils sont compris entre paralléles; donc on aura, à cause des paralléles PT, OG, $CO : CT :: CG : CP$, & à cause des paralléles TG, PH, $CG : CP :: CT : CH$; donc $CO : CT :: CT : CH$. C. Q. F. D.

Corollaire I.

352. Puisque l'on a $CO : CT :: CT : CH$, donc $CH = \frac{CT^2}{CO}$ & partant OH ou $CO - CH = CO - \frac{CT^2}{CO} = \frac{CO^2 - CT^2}{CO}$; d'où l'on tire cette analogie, $CO : CO + CT :: CO - CT : CH$. Si l'on suppose que l'abscisse CO soit infiniment grande, & le demidiametre CT d'une grandeur finie, la valeur de OH devient $\frac{CO^2}{CO} = CO$; puisque CT^2 étant le quarré d'une grandeur finie, n'est rien par rapport au quarré de CO que l'on suppose infini: d'où il suit que lorsque la tangente ne rencontre l'hyperbole qu'à l'infini, le point H tombe sur le point C, & par conséquent cette tangente devient l'asymptote de la courbe. On peut encore déduire cette verité de la premiere proportion, $CO : CT :: CT : CH$; car si l'on suppose que CO soit infiniment grande par rapport à CT, CT sera aussi infiniment grande par

rapport à *CH*, donc le point *H* n'est pas différent du point *C*.

COROLLAIRE II.

353. Donc toutes les tangentes que l'on peut mener à l'hyperbole, se trouvent renfermées depuis le centre *C* jusqu'au point *T* origine d'un diametre quelconque : c'est-à-dire que jamais une tangente ne pourra rencontrer un diametre au-de-là du centre *C*. Les diametres dont il s'agit ici sont les premiers diametres de l'hyperbole à laquelle on suppose que la tangente a été menée.

COROLLAIRE III.

354. Puisque $CO:CT::CT:CH$, donc *invertendo* $CH:CT::CT:CO$, & *componendo* $CT+CH:CT::CO+CT:CO$ & *dividendo* $CT-CH:CT::CO-CT:CO$; donc $CT+CH:CT-CH::CO+CT:CO-CT$ & *reduisant* $IH : HT :: IO : OT$.
d'où il suit que la ligne *IO* est coupée en proportion harmonique aux points *H*, *T*; puisque la plus grande partie *IO*, est à la plus petite *IH*, comme l'excès *OT*, de la plus grande sur la moyenne, est à l'excès *HT* de la moyenne sur la plus petite.

PROPOSITION XXXV.

THÉORÊME.

355. *Si par un point* P *d'une hyperbole*, (*fig.* 93) *on mene une ordonnée* Po, *à un second dia-*

metre Ct, *& une tangente* Ph *terminée au même diametre prolongé autant qu'il est nécessaire, je dis que l'on aura* Co : Ct :: Ct : Ch.

DÉMONSTRATION.

Par le centre C, soit mené le diametre CT paralléle à l'ordonnée Po, & par conséquent conjugué au diametre Ct; lequel rencontre la tangente Ph, dans un point H: par le point P soit encore menée au diametre CT l'ordonnée PO, qui sera paralléle au diametre Ct: à cause du parallélogramme $COPo$, on pourra prendre Co à la place de PO, & Po à la place de CO: il est de plus évident que les triangles POH, hCH sont semblables, à cause des paralléles Ch, PO; donc on aura $OH : PO$ ou $Co :: CH : Ch$, donc $Ch = \frac{CH \times Co}{OH}$, mais (*num* 352.) $CH = \frac{CT^2}{CO}$ & $OH = \frac{CO^2 - CT^2}{CO}$, donc en substituant ces valeurs on aura $Ch = \frac{\frac{CT^2 \times Co}{CO}}{\frac{CO^2 - CT^2}{CO}} = \frac{CT^2 \times Co}{CO^2 - CT^2}$: mais CO^2 ou Po^2 qui lui est égale, étant une ordonnée extérieure à l'hyperbole, on aura CO^2 ou $Po^2 = CT^2 + \frac{Co^2 \times CT^2}{Ct^2}$ donc $Ch = \frac{CT^2 \times Co}{CT^2 + \frac{Co^2 \times CT^2}{Ct^2} - CT^2} = \frac{CT^2 \times Co^2}{\frac{Co^2 \times CT}{Ct^2}} = \frac{Ct^2}{Co}$ en réduisant, d'où l'on tire $Co : Ct :: Ct : Ch$. C. Q. F. D.

DÉFINITION.

356. La ligne OH ou oh comprise entre la rencontre d'une ordonnée PO, & la tangente PH, menée par l'extrémité de cette ordonnée

le même plan ; mener par ce point une tangente à l'hyperbole. (*fig.* 93)

SOLUTION.

Par le centre C, & le point donné H, on menera un diametre CHT, qui rencontrera l'hyperbole dans un point T. Sur ce diametre prolongé autant qu'il sera nécessaire, on prendra une partie CO telle que l'on ait . . . $CH : CT :: CT : CO$; par le point O, l'on menera une double ordonnée OP au diametre CO, dont les points P, p détermineront les points d'attouchement des tangentes que l'on cherche ; pour avoir l'angle des ordonnées, par le point T, on menera une ligne TR paralléle à l'une des asymptotes CF, on prendra ensuite la partie DR égale à CR, & l'on menera la droite DTF qui sera tangente en T, (*art.* 309.) & par conséquent déterminera l'angle des ordonnées. Ainsi l'on n'aura qu'à mener par le point O la droite POp paralléle à DF, pour avoir les points P, p avec toute la précision possible. Ce seroit à peu près la même solution, si le point H se trouvoit en h, dans l'angle d'une des hyperboles conjuguées: alors, une tangente seroit terminée à une hyperbole, & l'autre seroit terminée à son opposée. Cette solution porte sa démonstration avec elle, & suit entierement des principes que nous avons établis.

PROPOSITION

PROPOSITION XXXVII.

362. *Supposant toutes choses comme dans la 35eme. proposition ; si par l'éxtrémité* T *d'un diametre, on mene la tangente* TA *paralléle à l'ordonnée* PO *du diametre* CT, *laquelle coupe la tangente* PH *en* S, *& se termine à l'une des asymptotes en* A, *je dis que l'on aura toujours cette proportion* $CO+CT : CO-CT :: TA^2 : TS^2$ (*fig.* 94).

DÉMONSTRATION.

A cause des paralléles *PO*, *TS* les triangles *POH*, *STH* sont semblables, & donnent $OH^2 : PO^2 :: TH^2 : TS^2$, mais (*art.* 360) $OH = \frac{CO^2-CT^2}{CO}$, donc $OH^2 = \frac{(CO^2-CT^2)^2}{CO^2}$: PO^2 étant le quarré de l'ordonnée *PO* ; on aura $PO^2 = \frac{CO^2-CT^2}{CT^2} \times TA^2$; on aura aussi $TH = CT - CH = CT - \frac{CT^2}{CO} = \frac{CT \times CO - CT^2}{CO} = \frac{CT \times \overline{CO-CT}}{CO}$ donc $TH^2 = \frac{CT^2 \times \overline{CO-CT}^2}{CO^2}$ enfin ; $TS^2 = TS^2$: donc en substituant ces valeurs à la place des premieres ; la proportion précédente devient celle-ci. $\frac{\overline{CO^2-CT^2}^2}{CO^2} : \frac{CO^2-CT^2}{CT^2} \times TA^2 :: \frac{CT^2 \times \overline{CO-CT}^2}{CO^2} : TS^2$: Divisant les deux premiers termes par $CO^2 - CT^2$, & multipliant les deux antécédents par la même quantité CO^2, elle deviendra celle-ci : $CO^2 - CT^2 : \frac{TA^2}{CT^2} :: CT^2 \times \overline{CO-CT}^2 : TS^2$; divisant encore les deux antécédents par $CO-CT$, & multipliant le premier & le second terme par CT^2, on aura $CT^2 \times (CO+CT) : TA^2 :: CT^2 \times (CO-CT) : TS^2$, ou, en divisant les deux

antécédents par CT^2, & alternant $CO + CT : CO - CT :: TA : TS^2$. C. Q. F. D.

Corolliare.

363. Si l'on ſuppoſe que l'abſciſſe *CO* devienne infiniment grande, les deux premiers termes $CO+CT$, $CO-CT$ deviennent égaux; puiſqu'une quantité finie ne peut diminuer ou augmenter l'infini, de quelque maniere qu'elle ſoit combinée avec lui, par addition ou par ſouſtraction : donc $TS^2=TA^2$; d'où il ſuit que lorſque la tangente *PH* ne rencontre l'hyperbole qu'à l'infini, elle paſſe par l'extrémité de tous les ſeconds diametres : d'ailleurs nous avons vû (*num.* 360.) qu'une pareille tangente paſſe auſſi par le centre de l'hyperbole; donc cette tangente ne peut être différente de l'aſymptote puiſque cette ligne a préciſément ces deux propriétés.

Définition.

364. Suppoſant que la tangente *PH* (*fig.* 94.) rencontre l'axe *CT* en *H*, & que l'ordonnée *PO* au même axe menée par le point touchant *P*, eſt parallele au ſecond demi axe *AT*; ſi par le point *P*, on éleve une perpendiculaire *PR*, juſqu'à ce qu'elle rencontre l'axe prolongé autant qu'il eſt néceſſaire, la partie *OR* de cet axe, compriſe entre l'ordonnée *PO*, & la rencontre de la perpendiculaire *HR* à la tangente en *P*, eſt appellée *ſouperpendiculaire* ou *ſounormale*.

PROPOSITION XXXVIII.

THÉOREME.

365. *Supposant toutes choses comme dans la définition précédente, je dis que l'abcisse* CO *&* *la sounormale* OR *sont toujours dans un rapport constant; qui est celui de* CT^2 *à* TA^2. *C'est-à-dire que l'on aura toujours cette proportion* . . . . $CO : OR :: CT^2 : TA^2$.

DÉMONSTRATION.

Le triangle rectangle *RPH* étant divisé en deux autres triangles rectangles *ROP*, *POH*, semblables entr'eux & au grand triangle; on a $OH : PO :: PO : OR$, donc $PO^2 = OH \times RO$, mais $PO^2 = CO^2 - CT^2 \times \frac{TA^2}{CT^2}$, & $OH = \frac{CO^2 - CT^2}{CO}$; donc on aura aulieu de l'équation précédente $(CO^2 - CT^2) \times \frac{TA^2}{CT^2} = (CO^2 - CT^2) \times \frac{OR}{CO}$, d'où l'on tire en divisant chaque membrepar $CO^2 - CT^2$, $CO : OR :: CT^2 : TA^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

366. Si l'angle des asymptotes est aigu, on aura toujours $CT > TA$, donc aussi *CO* sera plus grand que *OR*: ce seroit le contraire si l'angle étoit obtus. Si l'on suppose l'abscisse *OT* infiniment petite, ou, ce qui revient au même, $CO = CT$; la sounormale *OR* devient égale à $\frac{TA^2}{CT}$, car de la proportion $CO : OR :: CT^2 : TA^2$, on tire $OR = \frac{TA^2 \times CO}{CT^2}$, donc lorsque $CO = CT$, $OR = \frac{TA^2}{CT}$. Mais il est évident, que cette expression n'est autre chose que le demi parametre de l'axe double de *CT*; donc toutes les

perpendiculaires à la courbure de l'hyperbole; seront comprises sur l'axe, depuis le point *K* que l'on suppose éloigné du sommet *T* de la courbe, de la grandeur du demi parametre, jusqu'à l'infini; ensorte qu'aucune perpendiculaire aux différentes parties de cette courbe, ne pourra tomber entre les points *T* & *K*, c'est ce que nous avions déja reconnu en partie (*num.* 279).

COROLLAIRE II.

367. de tous les cercles que l'on peut inscrire à l'hyperbole qui touchent cette courbe à son sommet *T*, le plus grand possible est celui qui a pour rayon la ligne *TK* moitié du parametre. On démontreroit cette proposition à-peu-près comme nous avons démontré l'article (176) de l'ellipse. D'où il suit que plus l'angle des asymptotes sera grand, plus aussi les cercles inscriptibles aux hyperboles comprises dans ces angles, & tangents aux sommets des mêmes courbes seront grands; de maniere cependant que le rayon de ce cercle n'excédera jamais le demi parametre de l'axe principal. On peut encore reconnoître cette vérité, si l'on fait attention que la courbure d'une hyperbole dépendant de l'angle des asymptotes, plus cet angle sera obtus, moins elle sera grande; & partant, plus le rayon du cercle inscriptible à la courbe sera grand, puisque les courbures des cercles sont en raison inverse des rayons. On voit par ce corollaire qu'en

général dans toutes les sections coniques le plus grand cercle inscriptible à chacune de ces courbes & tangent à l'origine de son son axe, est celui qui a pour rayon la moitié du parametre.

CORALLAIRE. III.

368. Si l'angle des asymptotes est droit, ou, ce qui revient au même, si l'hyperbole est équilatére; on aura toujours $CO=OR$, puisque dans ce cas $CT=TA$. D'où il suit que la distance du point O au point R, est égale à la distance du même point O au centre C de l'hyperbole.

SCHOLIE.

369. On a dû remarquer par tout ce que nous avons vû, que l'hyperbole équilatére a toutes les propriétés du cercle, mais dans un sens contraire; de même que les autres hyperboles ont les propriétés inverses des ellipses en général : ce rapport de l'hyperbole équilatére au cercle est frappant dans le dernier corollaire. Tout le monde sçait que les perpendiculaires aux tangentes d'un cercle passent toutes par le centre, ainsi la souperpendiculaire est toujours égale à l'abscisse dans le cercle; & aussi éloignée de l'extrémité inférieure de l'ordonnée que le centre C, du même côté : dans l'hyperbole équilatére, toutes les souperpendiculaires sont égales aux abscisses, & le point R est est aussi éloigné du point O que le centre C l'est du même point, mais de l'autre côté.

PROPOSITION XXXIX.

THÉORÊME.

370. *Si des extrémités* P, Q *de deux diametres conjugués* CP, CQ, (*fig.* 95.) *on mene à un diametre quelconque* CT, *des ordonnées* PO, QR; *je dis que la différence des quarrés des abſciſſes, correſpondantes à ces ordonnees, eſt égale au quarré du diametre auquel on a mené ces ordonnées; c'eſt-à-dire, que l'on aura* $CO^2 - CR^2 = CT^2$.

DÉMONSTRATION.

Par le point *P* extrémité du diametre *CP*, ſoit menée la tangente *PH* parallèle à ſon conjugué *CQ*, juſqu'à ce qu'elle rencontre en *H* le diametre *CT* auquel on a mené les ordonnées *PO*, *QR*. La droite *PO* étant une ordonnée au diametre *CT*, on aura $PO^2 : CO^2 - CT^2 :: CB^2 : CT^2$, (on ſuppoſe que *CB* eſt conjugué à *CT*) donc $PO^2 = \frac{CO^2 - CT^2 \times CB^2}{CT^2}$: *QR* étant une ordonnée extérieure à l'hyperbole *BQ*, on aura (*art.* 326) $QR^2 : CT^2 + CR^2 :: CB^2 : CT^2$, donc $QR^2 = \frac{(CT^2 + CR^2) \times CB^2}{CT^2}$, donc $PO^2 : QR^2 :: (CO^2 - CT^2) \times \frac{CB^2}{CT^2} : (CT^2 + CR^2) \times \frac{CB^2}{CT^2} :: CO^2 - CT^2 : CT^2 + CR^2$. Et à cauſe des triangles ſemblables *HPO*, *CQR*, on a $QR^2 : PO^2 :: CR^2 : OH^2$, donc en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $PO^2 \times QR^2 : QR^2 \times PO^2 :: CR^2 \times CO^2 - CR^2 \times CT^2 : OH^2 \times CT^2 + OH^2 \times CR^2$. Et comme les deux premiers termes ſont

égaux, les deux derniers le ſeront auſſi, & donneront $CR^2 \times CO^2 - CR^2 \times CT^2 = OH^2 \times CT^2 + OH^2 \times CR^2$, donc en tranſpoſant le terme $OH^2 \times CR^2$, & réduiſant le premier membre, on aura $(CO^2 - CT^2 - OH^2) \times CR^2 = OH^2 \times CT^2$, d'où l'on déduit $CR^2 = \frac{OH^2 \times CT^2}{CO^2 - CT^2 - OH^2}$. Préſentement ſi à la place de OH^2 on met ſa valeur $\frac{(CO^2 - CT^2)^2}{CO^2}$ (*num.* 352.), on aura en réduiſant $CO^2 - CT^2$ à la même dénomination $CR^2 = \frac{\frac{(CO^2 - CT^2)^2 \times CT^2}{CO^2}}{\frac{(CO^2 - CT^2) \times CO^2 - (CO^2 - CT^2)^2}{CO^2}}$ & diviſant le numérateur & le dénominateur de cette fraction par la fraction commune $\frac{CO^2 - CT^2}{CO^2}$ on aura pour la valeur de CR^2; $CR^2 = \frac{(CO^2 - CT^2) \times CT^2}{CO^2 - CO^2 + CT^2} = CO^2 - CT^2$, en effaçant ce qui ſe détruit. Donc $CO^2 - CR^2 = CT^2$; en faiſant paſſer $-CT$ du ſecond membre dans le premier, & CR^2 du premier dans le ſecond. C. Q. F. D.

On démontreroit de la même maniere que ſi des extrémités P, Q des mêmes diametres, on mene les ordonnées Po, Qr au diametre CB, conjugué à CT, on auroit $Cr^2 - Co^2 = CB^2$.

COROLLAIRE

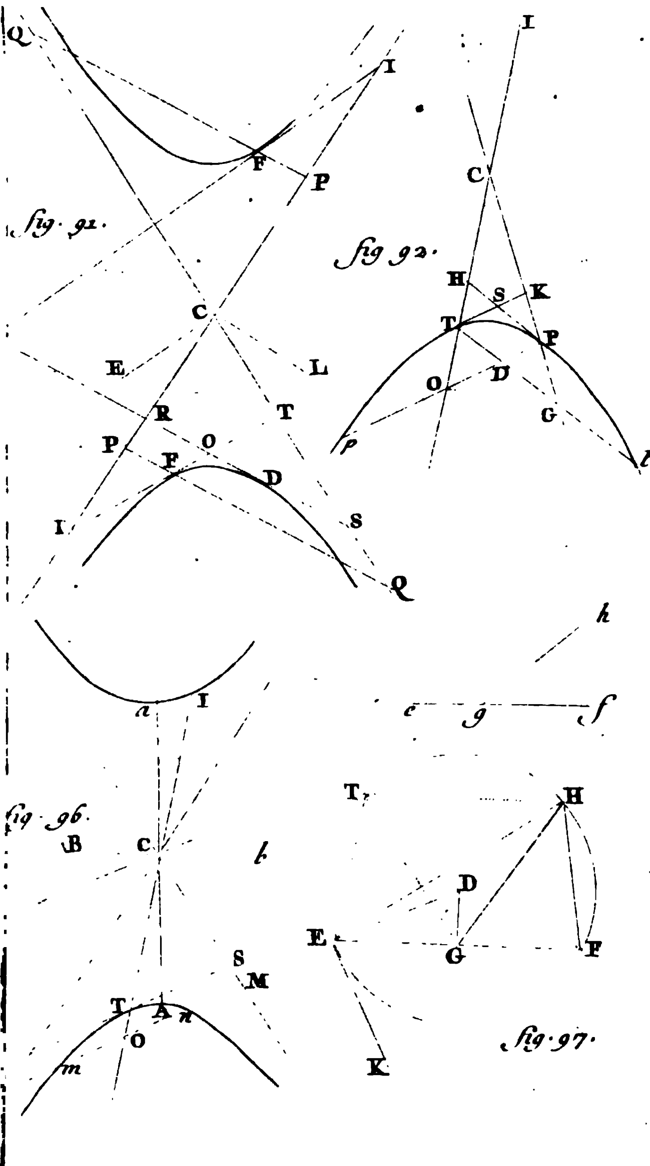
371. Si le diametre CT eſt le grand axe de l'hyperbole, le diametre CB conjugué à CT, ſera le ſecond axe, les triangles COP, CQR; ſeront rectangles, puiſque les axes font toujours angle droit l'un avec l'autre, & l'on aura toujours $CO^2 - CR^2 = CT^2$ & $Cr^2 - Co^2 = CB^2$; donc en retranchant la ſeconde égalité de la

l'hyperbole donnée, dont les lignes *EH*, *FH* représentent les asymptotes; & partant les triangles *LCM*, *EHF* sont égaux, puisqu'ils ont un angle égal, compris entre côtés égaux; donc la ligne *CTO*, qui divise la droite *LM* en deux parties égales, est un diametre de l'hyperbole & fait avec sa double ordonnée *mn*, l'angle demandé, ainsi ayant mené par le point *T* où le diametre *CT* rencontre l'hyperbole, la tangente *TS*, cette ligne sera le second demidiamerre demandé. C. Q. F. D.

REMARQUE.

Comme l'hyperbole est une courbe symétrique en supposant que les diametres donnés Aa, Bb *soient les deux axes, on pourroit trouver de l'autre côté* Aa, *un autre diametre qui fît aussi avec ses ordonnées ou son conjugué un angle égal à l'angle proposé : c'est ce qu'on peut reconnoître par la fig.* 97; *car si l'on mene par le point* H *la paralléle* IH *à la corde* EF, *& que par le point* I *on mene les droites* IE, IG, IF, *on aura un nouveau triangle* IEF, *égal au triangle* HEF, *par le moyen duquel on pourra déterminer deux nouveaux diametres conjugués qui qui ayent les mêmes proprietés que les deux premiers* CT, CS.

Les propositions que nous venons de voir sont précisément les mêmes que celles que nous avons démontré dans l'ellipse, ou leurs inverses : dans le reste de ce livre, nous allons examiner les propriétés que l'on peut regarder comme particulieres à l'hyper-


Q
I
F
P
fig. 91.
C
E
L
R
T
P
O
F
D
I
S
Q
I
C
fig 92.
H
S
K
T
P
O
D
G
p
t
h
a
I
c
g
f
fig. 96.
B
C
b
T
H
D
E
G
F
S
M
T
A
n
O
m
K
fig. 97.

bole considérée par rapport à ses asymptotes ; nous déterminerons les rapports des portions d'une même hyperbole, & ceux des différentes hyperboles. On n'a point trouvé jusqu'ici de méthode pour toiser la surface absolue de l'hyperbole, & selon toutes les apparences la quadrature exacte de cette courbe n'est pas plus aisée que celle de l'ellipse ; & de même que la quadrature de toutes les ellipses imaginables dépend de celle du cercle que l'on peut regarder comme la plus simple dans le genre elliptique ; nous ferons voir aussi que la quadrature de toutes les hyperboles possibles, se réduit à celle de l'hyperbole équilatere qui est aussi la plus simple de toutes dans le genre hyperbolique.

DÉFINITIONS.

373. Une surface comprise entre une corde *AE*, & une partie de la courbe *ABE*, est appellée *segment hyperbolique*, (*fig.* 98.)

374. Une surface *ACEBA* comprise entre la même courbe, & deux diametres *CA*, *CE* terminés aux extrémités de l'arc *ABE*, est appellé, *secteur hyperbolique.*

PROPOSITION XLI.

THÉOREME.

375. *Deux segments hyperboliques* ABE, BAD (*fig.* 98.) *sont égaux lorsqu'ils sont compris entre des paralléles* DE, TS.

DEMONSTRATION.

Nous supposerons d'abord que les cordes *AE*, *BD* qui soutiennent les segments *ABE*,

courbe, par lequel & par le point *A* menant une soutendante, le segment compris entre cette corde & son arc seroit encore égal au segment proposé. Enfin, le problême peut toujours avoir deux solutions tant que le point *A* sera différent des points *B*, *D*, & qu'il sera compris dans l'arc *AD* : partout ailleurs il ne peut en avoir qu'une.

Corollaire. II.

380. Il suit encore delà que pour partager un segment ou un secteur hyperbolique en deux parties égales, il n'y a qu'à mener par le centre *C* & le point D milieu de la soutendante *AB* (*fig.* 100) le diametre *CTD*; car on peut concevoir le segment *ATB* comme composé d'une infinité de lignes droites *GH* paralléles à *AB*; donc puisque le diametre divise toutes ces paralléles en deux également, il divisera aussi le segment en deux parties égales; c'est par la même raison qu'il divise le secteur en deux également; car il est évident que les éléments *FG*, *HE* de la partie concave *CATSB* sont égaux l'un à l'autre puisque *EI*=*FI* & que *GI*=*IH*.

PROPOSITION XLIII.

Théorême.

381. *Deux segments hyperboliques sont égaux lorsqu'ils ont même base* FG (*fig.* 101) *& qu'ils sont compris entre paralléles* FG, TB; *soit qu'ils*

soient

ſoient tous les deux inclinés, ou que l'un ſoit droit & l'autre oblique.

DÉMONSTRATION.

Par le point *M* milieu de la droite *FG*, qui eſt la baſe commune aux deux ſegments, & les points *T*, *L* où les courbes touchent la paralléle *TB* à la baſe *FG*, ſoient menées les lignes *MTC*, *MLD* quiſeront des diametres, puiſqu'elles diviſent la baſe de chaque ſegment en deux parties égales, & quelles paſſent par les ſommets *T*, *L* des mêmes ſegments. Si le point *C* eſt le centre de l'hyperbole droite *FTG*; le point *D* où la ligne *CD* paralléle à *FG* coupe le diametre *ML*, ſera auſſi le centre de l'hyperbole oblique *FLG*: car ſi l'on imagine des hyperboles opposées aux deux premieres, chacune ſera ſemblable à ſon oppoſée, & les ſommets *t*, *l* de ces courbes ſeront dans une même ligne *tl*, paralléle à *TL*; d'où il ſuit évidemment que le point *D* ſera le centre de l'hyperbole *FLG*. Cela poſé; nous imaginerons que la ſurface de chaque ſegment eſt compoſée d'une infinité d'ordonnées placées les unes auprès des autres comme *PO*, *po*; & nous ferons voir que chaque ordonnée *PO*, eſt égale à ſa correſpondante *po*; car c'eſt à quoi ſe réduit toute la démonſtration, puiſque le nombre des éléments eſt le même de part & d'autre, étant meſuré par la perpendiculaire *TM*.

Les droites *GM*, *PO* étant ordonnées au même axe *CM* de l'hyperbole *FTG*, leurs

quarrés sont comme les produits des abscisses correspondantes, ce qui donne $PO^2:MG^2 :: CO^2 - CT^2 : CM^2 - CT^2$; par la même raison, MG & po étant ordonnées au diametre DM, on aura $po^2 : MG^2 :: Do^2 - DL^2 : DM^2 - DL^2$. Mais à cause des triangles semblables MCD, MTL, MOo; les parties CM, CO, CT sont proportionnelles aux parties DM, Do, DL; ce qui donne $CO^2 : CT^2 :: Do^2 : DL^2$ & $CM^2 : CT^2 :: DM^2 : DL^2$, donc *dividendo* $CO^2 - CT^2 : CT^2 :: Do^2 - DL^2 : DL^2$ & de même $CM^2 - CT^2 : CT^2 :: DM^2 - DL^2 : DL^2$, d'où l'on tire, $CO^2 - CT^2 : CM^2 - CT^2 :: Do^2 - DL^2 : DM^2 - DL^2$. Donc $PO^2 : MG^2 :: po^2 : MG^2$; donc $PO^2 = po^2$; donc $PO = po$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

382. Il suit de cette proposition, que le diametre LB conjugué au diametre DL est égal au second axe AT de l'hyperbole FTG. Car puisque MG est ordonnée à l'axe CM, on aura $MG^2 : CM^2 - CT^2 :: TA^2 : CT^2$; donc $MG^2 = \frac{CM^2 - CT^2}{CT^2} \times TA^2$: de même MG étant une ordonnée au diametre DM, on aura $MG^2 : DM^2 - DL^2 :: LB^2 : DL^2$, donc $MG^2 = \frac{DM^2 - DL^2}{DL^2} \times LB^2$; donc $\frac{CM^2 - CT^2}{CT^2} \times TA^2 = \frac{DM^2 - DL^2}{DL^2} \times LB^2$ & divisant chaque membre par les rapports égaux $\frac{CM^2 - CT^2}{CT^2}$ & $\frac{DM^2 - DL^2}{DL^2}$, on aura $TA^2 = LB^2$, donc $TA = BL$.

COROLLAIRE II.

383. Puisque $OP = op$, en ôtant de ces lignes égales la partie commune oP, on

aura $Oo=Pp$: d'où il suit que si par le point *R* où le diametre *DL* rencontre l'hyperbole *TG*, on mene une droite *QRS* paralléle à *MG*; le triangle *MRS* sera égal à l'espace curviligne *GQR* terminé par deux portions d'hyperboles différentes, & par la ligne droite *QR*.

Corollaire. III.

384. Il suit encore de cette proposition, que deux secteurs hyperboliques de deux hyperboles différentes sont égaux, lorsqu'ils ont même base & qu'ils sont compris entre paralléles. Car les triangles *CFG*, *DFG* sont égaux puisqu'ils ont même base & même hauteur; & si de ces triangles on ôte les hyperboles égales, les restes ou les secteurs hyperboliques *CFTG*, *DFLG* seront égaux. Cette proposition est vraye pour toutes les sections coniques & la démonstration seroit la même pour chacune de ces courbes.

PROPOSITION XLIV.

Theoreme.

385. *Soient deux hyperboles* TM, TN *(fig.* 102 *) ou* AM, BN *(fig.* 103*) dont* CT *est un diametre commun,* CB, CA *les diametres Conjugués au diametre commun* CT; *si par un point* P *pris sur le même diametre on tire une droite* PMN *terminée aux deux hyperboles, & paralléle au diametre* CA, *je dis que l'on aura toujours* P*M* : PN :: *C*A : CB, *c'est-à-dire que les ordonnées à ces différentes courbes*

ſont entr'elles comme les diametres inégaux conjugués au diametre commun.

DÉMONSTRATION.

Comme PM eſt une ordonnée à l'hyperbole CTM, on aura $PM^2 : CP^2 - CT^2 :: CA^2 : CT^2$; & de même, parceque PN eſt ordonnée à l'hyperbole TN, on aura par la même raiſon $PN^2 : CP^2 - CT^2 :: CB^2 : CT^2$, donc puiſque les conſéquents de ces proportions ſont en proportion, les antécédents y ſont auſſi ; & donneront $PM^2 : PN^2 :: CA^2 : CB^2$, donc tirant les racines; $PM : PN :: CA : CB$. C. Q. F. D.

Si le diametre commun n'eſt pas un premier diametre, les ordonnées PM, PN ſeront extérieures aux hyperboles BN, BM; & la proportion ſera toujours la même. Car puiſque les diametres CA, CB ſont conjugués au diametre commun CT, on aura pour l'hyperbole AM, $PM^2 : CT^2 + CP^2 :: TA^2 : CT^2$, & pour l'hyper. AN, $PN^2 : CT^2 + CP^2 :: CB^2 : CT^2$; donc on aura encore de même que dans la figure 102. . $PM : PN :: CA : CB$. C. Q. F. 2° D.

COROLLAIRE I

386. On peut concevoir les demi-ſegments hyperboliques TPM, TPN, comme étant compoſés d'une infinité d'ordonnées telles que PM, PN, infiniment proche les unes des autres ; & comme l'on aura toujours $PM : PN :: CA : CB$, il s'en ſuit que les demi ſegments TPM, TPN

seront entr'eux comme les diametres inégaux conjugués au diametre commun. Car dans une suite infinie de rapports égaux, la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un seul antécédent est à son conséquent. On démontreroit de même (*fig.* 103.) que les trapèses hyperboliques *CPNB*, *CPMA* sont entr'eux comme *CB* est à *CA*.

COROLLAIRE II.

387. Les triangles *CPM*, *CPN* (*fig.* 102.) ayant même hauteur sont entr'eux comme leurs bases *PM*, *PN*, ou comme *CA* est à *CB*; donc si l'on ôte de ces triangles les demi-segments *TPM*, *TPN*, qui sont dans la même raison, on aura $CPM - TPM : CPN - TPN :: CA : CB$; d'où il suit que les secteurs hyperboliques *CTM*, *CTN* sont aussi entr'eux comme les diametres inégaux conjugués au diametre commun.

De même, (*fig.* 103.) puisque les trapézes hyperboliques *CPNB*, *CPMA* sont entr'eux comme *CB* à *CA*, ainsi que les triangles *CPN*, *CPM*, puisqu'ils ont même hauteur *C P*, & que leurs bases *P N*, *P M*, sont entr'elles comme *CB* à *CA*, on aura la proportion suivante $CPNB - CPN : CPMA - CPM :: CB : CA$, d'où il suit que les secteurs hyperboliques *CMA*, *CNB* sont entr'eux comme les diametres inégaux conjugués au diametre commun.

COROLLAIRE III.

388. Si les diametres conjugués *CB*, *CT* de

l'hyperbole *TN* ſont égaux; (*fig.* 102.) ou; ce qui revient au même, ſi l'hyperbole *TN* eſt équilatère, on aura $PN^2 = CP^2 - CT^2$; mais l'hyperbole *TM* donne $PM^2 : CP^2 - CT^2 :: CA^2 : CT^2$, donc en mettant à la place de $CP^2 - CT^2$, PN^2 qui lui eſt égal, par la nature de l'hyperbole, équilatère, on aura $PM^2 : PN^2 :: CA^2 : CT^2$, ou $PM : PN :: CA : CT$; d'où il ſuit que l'on peut regarder une hyperbole quelconque, comme provenant d'une l'hyperbole équilatère dont on auroit allongé ou accourci toutes les ordonnées proportionellement, dans le rapport du diametre de l'hyperbole équilatére au ſecond diametre de l'hyperbole ainſi décrite. Il ſuit encore de-là que ſi l'on pouvoit quarrer un ſegment ou un ſecteur d'une hyperbole équilalatère on pourroit auſſi par une ſimple proportion, quarrer tous les ſegments correſpondants des autres hyperboles décrites ſur le même diametre, de même que nous avons enſeigné à quarrer les ſegments & ſecteurs elliptiques, par le moyen des ſegments circulaires correſpondants d'un cercle décrit ſur un des diametres de l'ellipſe propoſée.

PROPOSITION XLV.

Théorême.

389. *Si on prend ſur une aſymptote* CM *deux parties* CD, CF, *& ſur l'autre aſymptote* CN *deux autres parties* CL, CK (*fig.* 104) *proportionelles entr'elles, & qu'ayant mené par les extrémités de ces lignes, les parallèles aux mêmes aſymptotes* DE, FG, IL, KH; *juſqu'à ce qu'elles rencontrent l'hy-*

perbole aux points E, G, I, H; *on mene les diametres* CE, CG, CI, CH; *je dis que les secteurs CGE, CIH, sont égaux.*

DÉMONSTRATION.

Par les points *E*, *I*, *G*, *H* soient menées les droites *EI*, *GH* prolongées jusqu'à ce qu'elles rencontrent les asymptotes aux points *P*, *Q*, *M*, *N*; & soient encore menées par les points *I*, *H* les paralléles *HB*, *IA* á l'asymptote *CN*; on aura à cause des triangles semblables *DPE*, *LIQ*; *FMG*, *KHN* formés par les portions des asymptotes & les paralléles aux mêmes asymptotes; *PD*:*PE*::*LI*:*IQ*, & *MF*:*MG*::*HK*:*NH*; donc puisque (*num.* 292.) *PE* = *IQ* & que *MG* = *NH*, on aura aussi *PD* = *IL* ou *CA*, & *MF* = *HK* ou *CB*. Mais puisque les parallélogrammes *CH*, *CI* sont égaux (*num.* 299) & qu'ils ont un angle égal, les côtés sont réciproques, & donnent *CB* ou *MF* : *CA* ou *PD*::*CL*:*CK*, & *hyp.* *CL*:*CK*::*CD*:*CF*
& (*num.* 299) *CD*:*CF*::*FG*:*DE*
donc *MF*:*PD* :: *FG*:*DE*; d'où il suit que les triangles *MFG* & *PDE* sont semblables, & que les droites *PE*, *MG* ou les totales *PQ*, *MN* sont paralléles, puisque les droites *DE*, *FG* le sont *par construction*; donc les secteurs hyperboliques *CIH*, *CEG* compris entre les paralléles sont égaux (*art.* 378). C. Q. F. D.

COROLLAIRE. I.

390. Ayant mené par un point *I* de l'hyperbole des droites *IA*, *IL* paralléles aux

asymptotes, si l'on prend sur chaque asymptote des parties CK, CD telles que l'on ait $CL:CK::CA:CD$, il suit de-là proposition précédente que les secteurs CIH; CIE seront égaux; car on démontreroit de la même maniere que dans le théorême que la corde EH seroit paralléle à la tangente au point I.

Corollaire II.

391. Supposant toujours que l'on ait $CL:CK::CA:CD$, si l'on fait $CA:CD::CD:CF$, il suit de la proposition précédente que les trois secteurs hyperboliques CHI, CIE, CEG seront égaux ; car puisque $CL:CK::CA:CD$ les secteurs CHI, CIE sont égaux *par le corollaire précédent*, & puisque l'on a, par construction $CL:CK::CA:CD$ & encore $CA:CD::CD:CF$, donc $CL:CK::CD:CF$; d'où il suit que les secteurs CIH, CEG sont égaux entr'eux ; & partant les trois secteurs CIH, CIE, CEG le sont aussi.

Corollaire. III.

392. Si l'on regarde le secteur CIH comme l'unité ; le secteur $CHIE$ sera 2 ; le secteur $CHIEG$ sera 3 ; d'où il suit que les secteurs croissent en progression arithmétique ; d'ailleurs nous avons supposé que les abscisses CA, CD, CF sont en proportion continue géométrique, puisque l'on a $CA:CD::CD:CF$:

donc les ſecteurs hyperboliques *CHI*, *CHIE*; *CHIEG* peuvent être regardés comme les logaritmes des lignes *CA*, *CD*, *CF*. (on a vû dans l'aritmétique que les logaritmes, ſont des nombres en progreſſion aritmétique, correſpondants à des nombres en progreſſion géométrique, par exemple dans la progreſſion décuple ∺ 1 : 10 : 100 : 1000, &c. Les nombres 0, 1, 2, 3, &c. ſont les logaritmes des nombres 1, 10, 100, 1000, &c.)

COROLLAIRE. IV.

393. Il ſuit encore de-là que l'on peut calculer les logaritmes par les aires hyperboliques; & réciproquement les ſurfaces des ſecteurs hyperboliques par les logaritmes. Car ſi je connois l'abſciſſe *CF*, avec la ſurface du ſecteur *CHIG* qui eſt le logaritme de cette abſciſſe, & qu'on me demande la ſurface du ſecteur *CHE*, dont l'abſciſſe eſt *CD*; je n'aurai qu'à chercher le logaritme de *CD*, & ce logaritme ſera la ſurface du ſecteur *CHIE*.

On eſt redevable de cette admirable propriété au P. GRÉGOIRE DE S. VINCENT Jéſuite. Ce grand géometre la trouva lorſqu'il s'appliquoit à la quadrature du cercle; & l'on doit lui avoir une grande obligation de ſes recherches, quand elles n'auroient eu d'autre fruit que la ſeule propriété que nous venons de voir : elle a été démontrée depuis qu'on l'a connue de pluſieurs maniéres; celle que je viens de donner eſt de M. Le Marquis de l'Hopital; elle

m'a paru la plus ſimple de toutes. On en peut voir encore d'autres démonſtrations dans le traité des ſections coniques du P. DESCHALES. *Ce dernier a grand ſoin de rendre juſtice à l'auteur de la découverte, & ſe plaint en même temps d'une maniere aſſès adroite de ceux qui ne l'avoient pas imité; mais il ne faut point être ſurpris que cette vérité n'ait pas été connue par les anciens: comme ils ne connoiſſoient point les logaritmes, quand même ils auroient trouvé cette propriété, il n'y a guerres d'apparence qu'ils en euſſent vû l'utilité; & au-contraire il eſt probable que depuis la connoiſſance des logaritmes, une ſi belle propoſition ne pouvoit demeurer longtemps dans l'obſcurité.*

PROPOSITION XLVI.

THÉORÊME.

394. *ſi par les extèmités* I, E *d'un ſecteur hyperbolique* CIE (*fig.* 105.), *on mene parallélement à l'aſymptote* CL, *les droites* IA, ED, *terminées à l'autre aſymptote* CD; *je dis que le ſecteur hyperbolique* CIE, *ſera egal au quadrilatère* ADEI.

DÉMONSTRATION.

Soit encore menée par le point *I* la droite *IL* paralléle à l'aſymptote *CM*; le triangle *CLI* ſera égal au triangle *CDE*, puiſqu'ils ſont chacun moitiés de parallélogrammes égaux *CDEF*, *CAIL*. Donc, en ajoûtant ces triangles au ſecteur *CIE*, on aura le quadrilatére *CLIE* égal au quadrilatère *CDEI*; & ôtant enſuite

du premier *CLIE* le triangle *CLI*, & du second *CDEI*, le triangle *CAI* égal au triangle *CLI*, les restes seront égaux : il restera d'une part le secteur *CEI*, & de l'autre le quadrilatére *ADEI*, qui seront évidemment égaux. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

395. Donc si l'on a plusieurs secteurs hyperboliques égaux *CIH*, *CIE*, *CEG* (*fig.* 104) & que des exttémités de ces secteurs, on mene parallélement à l'une des asymptotes *CN*, les droites *HB*, *IA*, *ED*, *GF* terminés à l'autre asymptote *CM*, les trapéses hyperboliques *ABHI*, *EDAI*, *GFDE* correspondants aux secteurs hyperboliques, seront aussi égaux entr'eux. Dailleurs les bases *AB*, *AD*, *DF* de ces trapéses sont les différences des abscisses *CB*, *CA*, *CD*, *CF*, qui sont en progression géométriqne, comme on l'a démontré dans la proposition précédente, & dans ses corollaires ; on peut donc établir en général, que *les trapeses hyperboliques sont égaux lorsqu'ils ont pour base, les différences des abscisses en progression géométrique.* On peut aussi conclure que deux trapéses hyperboliques quelconques correspondants à deux secteurs hyperboliques, seront entr'eux comme les secteurs hyperboliques correspondants ; ce qui est bien évident, puisqu'ils sont chacuns égaux aux mêmes secteurs hyperboliques.

COROLLAIRE II.

396. Supposant toujours les secteurs hyperboliques *CIH*, *CIE*, *CEG* égaux entr'eux,

il suit de cette proposition que les trapéses hyperboliques *BAIH*, *BDEIH*, *BFGEIH*, sont en progression aritmétique ; donc ils peuvent représenter les logaritmes des abscisses correspondantes qui sont en progression géométrique.

PROPOSITION XVLII.

THÉOREME.

397. *Si par les extrémités A, D, F, H (fig. 106) des abcisses* CA, CD, CF, CH *prises sur une asymptote* CH, *& supposées en proportion continue, on mene parallélement à l'autre asymptote* CR *les ordonnées* AB, DO, FP, HK; *je dis que ces ordonnées seront ainsi que leurs abscisses, dans une progression géométrique; avec cette différence que la progression des ordonnées est décroissante & que celle des abscisses est croissante.*

DÉMONSTRATION.

Par la nature de l'hyperbole considérée entre ses asymptotes, on a les équations suivantes, $CD \times DO = CA \times AB$, $CA \times AB = CF \times FP$, $CF \times FP = CH \times HK$; d'où l'on tire . . . .
$HK:FP::CF:CH$,
par hypot. $CF:CH::CD:CF$; à cause de l'équation $CD \times DO = CF \times FP$,
on aura $CD:CF::FP:DO$
donc $HK:FP::FP:DO$, c'est-à-dire que les ordonnées *HK*, *FP*, *DO* sont en proportion continue ; car on démontreroit de la même maniere que $FP:DO::DO:AB$. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

398. On auroit pû déduire cette proposition

des deux précédentes : car puisque les abſciſſes *CB*, *CA*, *CD*, *CF* ſont en progreſſion géométrique (*fig.* 104) les ſecteurs hyperboliques correſpondants aux différences de ces abſciſſes comme *CIH*, *CIE*, *CEG* ſont égaux entr'eux: donc les parties *CK*, *CL*, *CO* de l'aſymptote *CN*, ſont en même raiſon que les parties *CF*, *CD*, *CA* de l'aſymptote *CF* (*art.* 389) : donc elles forment, ainſi que les premieres, une progreſſion géométrique. Il eſt deplus évident que ces mêmes parties *CK*, *CL*, *CO* ſont égales aux ordonnées *BH*, *AI*, *DE* ; à cauſe des paralléles entre leſquelles elles ſont compriſes : donc elles ſont en progreſſion géométrique.

Corollaire I.

339. Puiſque (*fig.* 106) les abſciſſes *CA*, *CD*, *CF*, *CH* ſont en progreſſion géométrique, les trapéſes hyperboliques correſpondants aux différences de chacune de ces abſciſſes à la premiere *CA*, tels que les trapéſes *ABOD*, *ABPF*, *ABKH* qui croiſſent en progreſſion aritmétique, (*art.* 396) ſont les logaritmes de ces abſciſſes : mais, *par la propoſition précédente*, les ordonnées correſpondantes *HK*, *FP*, *DO*, *AB* ſont auſſi en progreſſion géométrique ; donc le trapéſe *FPHK* pourra être regardé comme le logaritme de l'ordonnée *KH* ; le trapéſe *DOKH*, comme le logaritme de l'ordonnée *FP*, & enfin le trapéſe *ABKH*, comme celui de l'ordonnée *DO*.

COROLLAIRE II.

400. Il suit encore des propositions précédentes, que si l'on méne par l'extrémité *K* de la derniere ordonnées *HK*, & par le centre *C*, la droite *CK*; cette droite coupera les autres ordonnées aux points *L*, *M*, *N* de maniere que les parties *FL*, *DM*, *AN* de ces ordonnées seront de nouveaux termes de la progression géométrique de ces mêmes ordonnées; ensorte que l'on aura la progression suivante ∺ *AB* : *DO* : *FP* : *HK* : *FL* : *DM* : *AN*; car, par la propiété de l'hyperbole, (*art.* 299) *FP*:*HK*::*CH*:*CF*, & à cause des triangles *CHK*, *CFL*; *CH*:*CF*::*HK*:*FL*, donc *FP*:*HK*::*HK*:*FL*. On démontreroit de même que *HK*:*FL*::*FL*:*DM*; donc les ordonnées *AB*, *DO*, *FP*, *HK*, & les droites *FL*, *DM*, *AN* forment une progression géométrique.

COROLLAIRE III.

401. De même si par l'extémité *B* de la premiere ordonnée *AB*, & par le centre *C* on mene une droite indéfinie *CBI*, qui rencontre les autres ordonnées prolongées aux points *E*, *G*, *I*; on aura encore une suite de proportionelles *AB*, *DE*, *FG*, *HI* qui seront toujours en progression géométrique avec les ordonnées *HK*, *FP*, *DO*, *AB*; c'est-à-dire, que l'on aura cette progression
∺ *DO*:*AB*:*DE*:*FG*:*HI*. Car par la nature de

l'hyperbole nous avons ces proportions ... $DO : AB :: CA:CD$; à cause des triang. CAB, CDE; on aura $CA:CD :: AB:DE$; donc $DO:AB::AB:DE$. D'ailleurs les abscisses CA, CD, CF, étant, *par hypotese*, en progression géométrique; leurs proportionelles AB, DE, FG y seront aussi; donc on aura la suite de proportionelles ∺ $DO : AB : DE : FG : HI$.

COROLLAIRE IV.

402. Si l'on réunit ce que l'on vient de démontrer dans des deux corollaires précédents, on verra que des parties des ordonnées coupées par le diametre CK, de ces ordonnées & de leurs prolongements terminés au diametre CB, il en résulte cette progression géométrique croissante
∺ $AN:DM:FL:HK:FP:DO:AB:DE:FG:HI$; de laquelle on pourroit déduire un grand nombre de propriétés fort curieuses, que je supprime de peur d'entrer dans un trop grand détail.

COROLLAIRE V.

403. Puisque les abscisses CA, CD, CF, CH sont en progression géométrique, les quarrés des mêmes lignes y seront aussi, & par conséquent les triangles semblables CAB, CDE, CFG, CHI qui sont dans la raison des quarrés de ces mêmes abscisses, formeront entr'eux une progression géométrique. D'où il suit que si l'on donne zero pour logaritme au triangle

CAB, le secteur ou trapése hyperbolique *ABOD* pourra être pris pour le logaritme du triangle *CDE* ; de même le trapése hyperbolique *AFPOB* sera le logaritme du triangle *CFG*, & ainsi des autres. D'où il suit que si l'on connoît le triangle *CDE*, & le logaritme de ce triangle, ou, ce qui est la même chose, le le trapése *ABOD* ; on pourra connoître tous les autres trapéses tels que *AFPOB*, *AHKB* ; pourvû que l'on connoisse les triangles correspondants *CFG*, *CHI* dont ils sont les logaritmes. Ainsi les propriétés de ces triangles serviroient de la même maniere que les abscisses à calculer les aires hyperboliques, mais il vaut mieux se servir des abscisses, parceque des lignes sont plus simples que des triangles.

REMARQUE.

Tout ce que nous avons dit des trapéses hyperboliques doit aussi s'entendre des secteurs correspondants qui leurs sont égaux comme on l'a démontré (art. 394).

PROPOSITION XLVIII.

THÉOREME.

404. *Soient deux hyperboles* BLH, EGK *(fig. 107) placées entre les mêmes asymptotes* CM, CF; *& dont les puissances sont les quarrés* AB^2, DE^2; *si par un point quelconque* F *de l'une des asymptotes, on mene parallélement à l'autre asymptote* CM,

une

une droite FGH; *qui rencontre chacune des hyperboles aux points* H, G; *je dis que les ordonnées* FH, FG; *sont entr'elles comme les quarrés* AB^2, DE^2 *des puissances* AB, DE.

DÉMONSTRATION.

Par la propriété de l'hyperbole *BLH*, on a cette équation $CF \times FH = AB^2$; & par la même propriété de l'autre hyperbole *EGK*, on a $CF \times FG = DE^2$; donc en faisant une proportion avec les deux membres de cette équation, on aura $CF \times FH : CF \times FG :: AB^2 : DE^2$; & divisant la premiere raison par *CF*, on aura $FH : FG :: AB^2 : DE^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

405. On peut concevoir les trapéses hyperboliques *FDLH*, *FDEG* comme remplis d'une infinité d'ordonnées paralléles à *FG*, qui composent leurs superficies; & comme toutes ces ordonnées sont entr'elles, chacune à sa correspondante, dans le rapport de AB^2 à DE^2; la somme de ces ordonnées, ou les surfaces de ces trapéses seront aussi dans le même rapport. D'où il suit que si l'on a deux trapéses hyperboliques *DLHF*, *DEGF* terminés à deux hyperboles différentes comprises entre les mêmes asymptotes, & renfermés entre les mêmes paralléles *DE*, *FG*; ces trapéses seront entr'eux comme les quarrés des puissances des mêmes hyperboles.

COROLLAIRE II.

406. Il suit encore de ce que les hyperboles *BLH*, *EGK* ont les mêmes asymptotes, qu'elles ont aussi leur axe sur une même ligne droite: car le premier axe d'une hyperbole quelconque, divise l'angle des asymptotes en deux angles égaux; or il est visible qu'il n'y a qu'une seule ligne qui puisse diviser le même angle en deux également.

COROLLAIRE III.

407. Donc si le point *B* est le sommet de l'hyperbole *BLH*, en menant par ce point & le centre *C* la ligne *CB*; le point *E* où cette ligne rencontre la seconde hyperbole *EGK*, sera aussi le sommet de la même hyperbole. D'où il suit évidemment que les lignes *AB*, *ED* menées par les points *B*, *E* parallélement à l'asymptote *CM* sont les puissances de ces hyperboles.

COROLLAIRE IV.

408. Puisque l'on a toujours $FG : FH :: \overline{DE}^2 : \overline{AB}^2$, & que d'ailleurs il est évident que *DE* est plus grand que *AB*; on aura aussi toujours *FG* plus grande que *FH*: donc jamais le point *G* & le point *H* ne pourront se confondre en un seul & même point. D'où il suit que l'hyperbole *BH* est asymptote de l'hyperbole *EG*, c'est-à-dire que cette derniere s'approche continuellement de la premiere sans jamais pouvoir la toucher, si loin qu'on les prolonge l'une &

l'autre. On démontreroit la même chose de toute autre hyperbole comprise entre les mêmes asymptotes; donc toutes les courbes décrites dans le même angle sont asymptotes les unes par rapport aux autres.

COROLLAIRE V.

409. Il suit encore de-là que les aires hyperboliques indéfinis, compris entre chacune des hyperboles & les asymptotes communes, sont aussi entr'eux comme les quarrés des puissances *AB*, *DE*. Car on peut concevoir ces espaces hyperboliques comme remplis d'une infinité d'ordonnées paralléles à une des asymptotes; chacune étant à sa correspondante dans le rapport des quarrés des puissances, & le nombre de ces ordonnées étant le même de part & d'autre, puisque l'asymptote est la même de part & d'autre. On voit par-là, que quoique les espaces hyperboliques soient chacuns infinis ou plûtôt indéfinis, il n'en est pas moins possible & facile de déterminer les rapports qu'ils ont entr'eux. Au reste faut-il regarder chacun de ces espaces comme infinis en eux mêmes, & ne doivent-ils pas être considérés comme des grandeurs finies & déterminées, quoique leurs expressions & leurs limites soient infinies? On est d'autant plus tenté de le croire qu'il y a des espaces finis & terminés, celui du cercle, par exemple, que l'on transforme en d'autres courbes asymptotiques dont la derniere ordonnée n'a d'autre terme que l'infini. Je sçai

que chacune de ces courbes ont des propriétés qui les différencient totalement les unes des autres & de celle que nous examinons ici; mais au moins sera-t-il toujours certain que si l'on regarde les espaces compris entre l'hyperbole & les asymptotes comme infinis, ces sortes d'infinis ne sont que des infinis de rapport, & non pas cet infini, au-de-là duquel nous ne pouvons plus rien concevoir. On pourroit déduire encore de cette proposition & de ses corollaires, des démonstrations fort belles, de la divisibilité de la matiere à l'infini.

COROLLAIRE VI.

410. Si par les sommets *B*, *E* des hyperboles *BL*, *EG* on mene les tangentes *BT*, *ER*; les triangles *ABT*, *DER* seront semblables, & donneront $AB^2:DE^2::BT^2:ER^2$; à cause des triangles *CBT*, *CER* on a $BT^2:ER^2::CB^2:CE^2$. Donc les ordonnées *FG*, *FH* seront aussi entr'elles comme les quarrés des axes *CB*, *CE*; ou de leurs conjugués *BT*, *ER*: puisque les quarrés de ces axes sont proportionels aux quarrés des lignes *AB*, *DE*.

PROPOSITION XLIX.

Théoreme.

411. *Supposant toutes choses comme dans la proposition précédente; si par les points* G, H (*fig.* 108) *où une droite* FG *parallele à l'asymptote* CM, *rencontre les hyperboles* EG, BH; *on mene deux droites quelconques* LGM, IHK *paralleles entr'elles; je dis que les rectangles* IH × HK, LG × GM, *sont*

entr'eux comme les quarrés des axes CB, CE *des mêmes hyperboles; c'est-à-dire que l'on aura cette proportion* $IH \times HK : LG \times GM :: CB^2 : CE^2$.

DÉMONSTRATION.

A cause des paralléles *FG*, *CM* les droites *HK*, *GM* aussi paralléles entr'elles (*hyp.*) seront égales, donc on aura la proportion $IH \times HK : LG \times GM :: IH : LG$; & à cause des triang. semblables *FIH*, *FLG*, $IH : LG :: FH : FG$, & (*art.* 410.) $FH : FG :: CB^2 : CE^2$ donc $IH \times HK : LG \times GM :: CB^2 : CE^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

412. Par le centre *C* & le point *O* milieu de la droite *LM*, soit tiré le diametre *CRTO* qui coupe les hyperboles aux points *R*, *T*; & par ces points soient menées les droites *RS*, *TV* paralléles à la droite *ML*, & tangentes aux mêmes points. On aura par les propriétés des hyperboles (*art.* 290). $IH \times HK = RS^2$, & $LG \times GM = TV^2$ donc $IH \times HK : LG \times GM :: RS^2 : TV^2$; & à cause des trian. semb. *CRS*, *CTV*, $RS^2 : TV^2 :: CR^2 : CT^2$.

Donc $IH \times HK : LG \times GM :: CR^2 : CT^2$.

Donc aussi $CR^2 : CT^2 :: CB^2 : CE^2$; puisque, *par la prop. précé.* les quarrés des axes sont proportionels aux mêmes rectangles $IH \times HK$, $LG \times GM$; & si l'on divise par les lignes égales *HK*, *GM*; on aura $IH : LG :: CR^2 : CT^2$, ou, $:: CB^2 : CE^2$.

COROLLAIRE. II.

413. Il suit de cette propofition & de fon corollaire que tous les diametres communs aux hyperboles décrites dans les mêmes afymptotes, font proportionels entr'eux & aux axes des mêmes hyperboles. On doit entendre la même chofes des diametres conjugués à ces diametres communs, ou des tangentes menées par les extrémités des ces diametres; c'eft-à-dire, que de même que *CB*:*CE*::*CR*:*CT*, on aura auffi en fuppofant les tangentes *PB*, *DE*; *RS*, *TV* menées par les extrémités des axes & des diametres, *BP*:*ED*::*RS*:*TV*. Cela fuit évidemment des proportions démontrées ci-devant.

SCHOLIE.

414. On déduit de cette propofition & de fes corollaires une démonftration toute nouvelle des propriétés des fécantes intérieures & extérieures de l'hyperbole. Cette démonftration eft d'autant plus belle qu'elle peut s'appliquer à chacune des fections coniques en particulier, pourvûque l'on détermine dans l'ellipfe & dans la parabole, les lignes qui tiennent lieu d'afymptote dans chacune de ces courbes; ce que je ne crois pas que l'on ait examiné jufqu'ici, comme la démonftration que nous avons donné de ces propriétés (*art.* 338) eft un peu compliquée & que je ne crois pas qu'on en puiffe donner de plus fimple que celle que l'on tire

du dernier corollaire, nous allons nous en servir, pour démontrer un des cas principaux de cette proposition. Nous laisserons aux commençants le plaisir de trouver d'eux-mêmes l'application de la démonstration suivante à la parabole & à l'ellipse.

PROPOSITION L.

THÉORÊME.

415. *Soient deux droites* GF, MN (*fig.* 109) *qui se coupent dans un point* O, *audedans de l'hyperbole* BRP ; *lesquelles sont divisées en deux également aux points* I, K *par les diametres* CI, CK ; *je dis que les rectangles* MO×ON, GO×OF *sont entr'eux comme les quarrés des tangentes* RS, BL *paralléles aux droites* MN, GF *menées par les extrémités des diametres qui divisent ces lignes en deux également* ; 2° *que les produits* PO × OT, QO×OX *formés sur les parties des mêmes lignes terminées à l'hyperbole, sont entr'eux comme les quarrés des mêmes tangentes* RS, BL.

DÉMONSTRATION.

1° Imaginons une hyperbole semblable à la premiere, & qui passe par le point O d'intersection des droites *MN*, *GF*; supposant de plus que les diametres *CB*, *CR* qui passent par les milieux *K*, *I* des sécantes, rencontrent cette nouvelle hyperbole aux points *E*, *T*; & que par ces points on a mené les tangentes *ED*, *TV* qui seront aussi paralléles aux droites *FG*, *MN*.

Par la propriété de l'hyperbole OTE, on aura $MO \times ON = TV^2$, & $GO \times OF = DE^2$; donc on aura cette proportion $MO \times ON : GO \times OF :: TV^2 : DE^2$; *par le 2. corol. de la précéd. prop.* $TV^2 : DE^2 :: RS^2 : BL^2$. donc $MO \times ON : GO \times OF :: RS^2 : BL^2$. C. Q. F. 1° D.

2° Comme les lignes FG, MN sont coupées en deux également en K & en I, au lieu des rectangles $MO \times ON$, $GO \times OF$ on pourra prendre les expressions suivantes $MI^2 - OI^2$, $GK^2 - OK^2$, qui leurs sont égales, *par le lemme fondamental*, & de même aulieu des rectangles $MP \times PN$, $GQ \times QF$ on pourra prendre $MI^2 - PI^2$, & $GK^2 - QK^2$. Cela posé, l'hyperbole BRQ donne $MP \times PN$ ou $MI^2 - PI^2 = RS^2$, & $GQ \times QF$, ou $GK^2 - QK^2 = BL^2$: donc $MI^2 - PI^2 : GK^2 - QK^2 :: RS^2 : BL^2$; & comme la derniere raison de cette proportion est la même que celle de la derniere proportion du premier article de cette proposition, on aura $MI^2 - OI^2 : GK^2 - OK^2 :: MI^2 - PI^2 : GK^2 - QK^2$; ou *alternando* $MI^2 - OI^2 : MI^2 - PI^2 :: GK^2 - OK^2 : GK^2 - QK^2$; & *dividendo* $MI^2 - OI^2 - MI^2 + PI^2 : MI^2 - PI^2 :: GK^2 - OK^2 - GK^2 + QK^2 : GK^2 - QK^2$, ou bien *alternant & réduisant*, $PI^2 - OI^2 : QK^2 - OK^2 :: MI^2 - PI^2 : GK^2 - QK^2 :: RS^2 : BL^2$; or il est évident que $PI^2 - OI^2 = PO \times OT$, & que $QK^2 - OK^2 = OQ \times OX$: donc $PO \times OT : QO \times QX :: RS^2 : BL^2$. C. Q. E. 2° D.

Cette démonstration pourroit s'appliquer à tous les cas de cette proposition, en imaginant toujours

des hyperboles qui passent par les points d'intersection des droites FG, MN; *de quelque maniere qu'elles soient disposées.*

DÉFINITION.

416. Deux hyperboles sont *semblables*, lorsqu'on peut leur inscrire des figures semblables d'un même nombre de côtés.

PROPOSITION LI.

THÉORÊME.

417. *Deux hyperboles* ABDE, FGHI *sont semblables lorsqu'elles sont décrites dans les mêmes asymptotes (fig.* 110).

DEMONSTRATION.

Pour démontrer que des hyperboles décrites dans le même angle des asymptotes sont semblables; il n'y a qu'à faire voir qu'on peut leur inscrire des figures semblables d'un même nombre de côtés. Pour cela, par le centre *C* je mene deux diametres *CF*, *CI* qui rencontrent la premiere hyperbole aux points *A*, *E* & la seconde, aux points *F*, *I*: je tire les droites *AE*, *FI*. Je mene encore deux autres diametres *CBG*, *CDH* & je tire dans chaque hyperbole les cordes *AB*, *BD*, *DE* dans la premiere, & dans la seconde les cordes *FG*, *GH* & *HI*. Cela posé, je dis que le quadrilatere *ABDE* inscrit dans la premiere hyperbole, est semblable au quadrilatere *FGHI* inscrit dans la seconde: car les diametres *CA*, *CB*, *CD*, *CE*

ſont proportionels aux diametres correſpondants CF, CG, CH, CI de la ſeconde hyperbole (*art.* 413) & donnent $CA:CF::CB:CG$, donc AB eſt paralléle à FG : de même $CB:CG::CD:CH$, donc BD eſt paralléle à GH, on démontreroit de la même maniere que les lignes DE, HI; AE, FI ſont paralléles chacune à chacune. Il eſt de plus évident que les côtés AB, BD, &c. du premier polygone ſont proportionels aux côtés correſpondants du ſecond polygone; car à cauſe des triangles ſemblables CAB, CFG; CBD, CGH on aura les proport. ſuivantes $AB:FG::CB:CG$, & $CB:CG::BD:GH$; donc $AB:FG::BD:GH$; donc le quadrilatére $ABDE$ inſcrit à la premiere hyperbole, eſt ſemblable au quadrilatére $FGHI$ inſcrit à la ſeconde, puiſque ces figures ont des angles égaux compris entre côtés proportionels; donc les hyperboles $ABDE$, $FGHI$ auxquelles ces figures ſont inſcrites, ſont auſſi ſemblables. C. Q. F. D,

Corollaire. I.

418. Donc toutes les hyperboles décrites dans le même angle, ou entre les mêmes aſymptotes, ſont des figures ſemblables ; & réciproquement toutes les hyperboles ſemblables peuvent avoir les mêmes aſymptotes : car ſi cela n'étoit pas la propoſition que l'on vient de démontrer ſeroit fauſſe.

Corollaire II.

419. Donc toutes les hyperboles équilatères

font des hyperboles semblables ; car il ne peut pas y avoir deux sortes d'angles droits.

COROLLAIRE. III.

420. Toutes les hyperboles semblables, étant dans le cas des autres figures semblables, & pouvant être regardées comme des polygones d'une infinité de côtés ; elles seront entr'elles comme les quarrés de leurs axes, des diametres correspondants, ou qui font les mêmes angles avec les asymptotes : en un mot elles seront entr'elles dans la raison des quarrés des tangentes, des sécantes ou cordes semblablement placées, des premiers ou seconds diametres correspondants, de leurs parametres, & en général de toutes les lignes disposées de la même maniere, dans chacune de ces courbes.

REMARQUE.

421. Cette propriété est commune à toutes les sections coniques, c'est-à-dire qu'en général, deux sections coniques quelconques sont semblables, lorsqu'elles sont décrites dans un même angle. Car on peut déterminer dans l'ellipse des lignes qui répondent aux asymptotes de l'hyperbole. Ces lignes seroient celles qui passeroient par le centre & par les extrémités du petit axe élevé perpendiculairement au grand axe à l'origine de ce même axe ; & elles ont toutes les propriétés inverses des asymptotes de

l'hyperbole. Comme le centre d'une parabole considérée comme la derniere hyperbole possible, est sur l'axe de cette courbe prolongé à l'infini, il s'en suit que les lignes qui tiennent lieu d'asymptotes à la parabole sont deux lignes infinies & paralléles infiniment éloignées l'une de l'autre; puisque les deux branches de cette courbe s'éloignent continuellement l'une de l'autre: & de cette considération on peut conclure très-certainement que toutes les paraboles sont des figures semblables; puisqu'elles peuvent être regardées comme des hyperboles décrites entre les mêmes asymptotes. On peut aussi déduire de cette vérité, que toutes les paraboles décrites sur un même axe avec le même parametre, sont asymptotes les unes par rapport aux autres; car nous avons démontré cette propriété pour toutes les hyperboles possibles.

PROPOSITION LII.

PROBLEME.

422. *Une hyperbole* BL *étant donnée, décrire dans le même angle des asymptotes, une autre hyperbole* EG (*fig.* 107) *qui soit à la premiere dans une raison donnée.*

SOLUTION.

Supposons que le rapport donné soit celui de 2 à 3; c'est-à-dire que l'hyperbole donnée ne doive être que les deux tiers de l'hyperbole demandée. Par le centre C & un point B

quelconque de l'hyperbole donnée, on menera un diametre *CB* prolongé indéfiniment au-dedans de cette courbe, sur lequel on prendra une partie *CP* qui soit à *CB* dans la raison de 3 à 2; & l'on cherchera une moienne proportionelle *CE* entre *CB* & *CP*: cette droite sera un des diametres de l'hyperbole demandée, & le point *E*, un point de cette courbe par le moien duquel on pourroit la décrire par les propriétés des asymptotes. Cette solution porte sa démonstration avec elle; car 1° les hyperboles sont semblables puisqu'elles sont décrites dans les mêmes asymptotes (*art.* 418) reste à faire voir qu'elles ont entr'elles le rapport de 2 à 3. *Par construction* $CB : CP :: 2 : 3$ & à cause de la progression géométrique $CB:CE::CE:CP$, on aura $CB^2:CE^2::CB:CP::2:3$; donc les hyperboles qui sont entr'elles dans la raison des quarrés de *CB* & *CE* sont aussi comme 2 à 3. C. Q. F. T. & D.

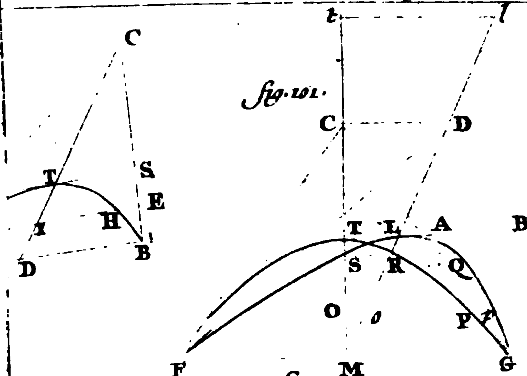
REMARQUE.

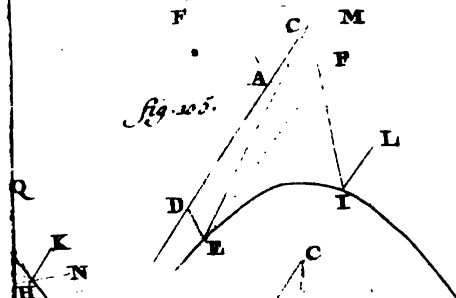
423. *On auroit pû se contenter de mener une droite* FH *parallèle à l'une des asymptotes, & de prendre sur cette ligne prolongée un point* G, *tel que l'on ait* FH:FG::2:3; *ce point auroit servi à décrire l'hyperbole demandée par le moyen des asymptotes; car les ordonnées* FH, FG *étant menées par le même point sont des ordonnées correspondantes de ces deux courbes, & doivent avoir entr'elles le même rapport que ces mêmes courbes, dont*

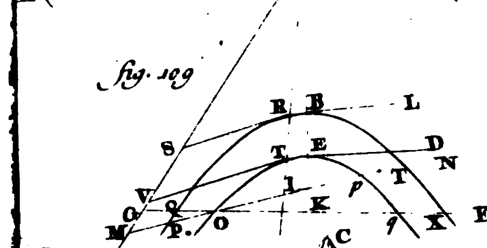
elles sont les éléments. Il faut encore remarquer que l'hyperbole BH *& le point* G *suffisent pour trouver tous les points de l'autre hyperbole* EG. *Il n'y a qu'à mener par le point* G *des droites quelconques* nGN, mGM *terminées à la premiere courbe, & prendre sur ces lignes les parties* gM = Gm, EN = Gn; *& les points* E, g *seront des points de la courbe demandée. Tout ce-ci est trop évident pour qu'on s'y arrête d'avantage; cette description se déduit immédiatement des propriétés des hyperboles asymptotes, & pourroit s'appliquer de la même maniere aux autres sections coniques sans en excepter le cercle.*

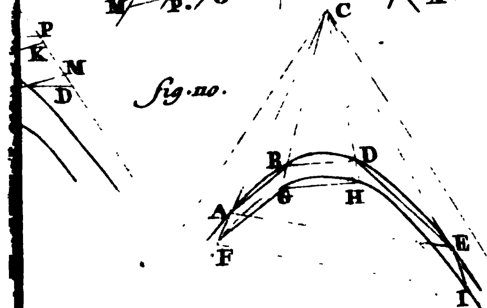
FIN DE L'HYPERBOLE.

Et du Troisieme Livre.


fig. 101.
C
T
S
E
I
H
D
B
t
l
C
D
T
L
A
B
S
R
Q
O
o
P
p
F
M
G


C
F
A
fig. 105.
L
Q
D
I
K
E
N
H


C
fig. 109
R
B
L
S
T
E
D
N
T
V
I
p
G
K
F
M
P
O
q
X


C
P
K
M
D
fig. 110.
B
D
G
H
A
F
E
I



AVERTISSEMENT.

OUTRE les descriptions particulieres géométriques & méchaniques des sections coniques, que je me suis proposé d'expliquer dans ce quatriéme livre ; j'ai eu principalement en vûe la comparaison de ces courbes les unes avec les autres. J'ai crû que je pourrois y expliquer plus commodément certaines propriétés communes aux sections coniques, & dont il auroit été difficile de parler dans les livres précédents sans déranger l'ordre qui m'a paru le plus naturel. Quoique nous ayons examiné séparément chacune de ces courbes, on ne peut s'empêcher de reconnoître une certaine analogie qui regne entr'elles pour les propriétés des diametres, des parametres, des foyers particulierement, & des sécantes intérieures ou extérieures & autres lignes que l'on peut appeller de même nom. Pour rapprocher d'avantage & mettre, pour-ainsi-dire, sous un seul point de vûe ces différents rapports, je commence par une description commune à toutes les sections coniques, & par la même raison, plus propre que toute autre à faire connoître comment on peut déduire ces courbes les unes des autres, &

comment on peut en simplifiant ou en compliquant une équation, passer, pour-ainsi-dire, de l'une à l'autre, sans avoir quitté la premiere. Comme les idées de l'infini entrent souvent dans ces espèces de transformations, & que d'ailleurs on ne doit pas prononcer hardiment sur l'infiniment grand & l'infiniment petit, la meilleure maniére de s'assurer que l'on a bien jugé, est de voir si l'on peut déduire les mêmes conséquences de plusieurs principes différents: rien de plus satisfaisant que de voir comment toutes les constructions imaginables s'entendent, pour-ainsi-dire, à établir les mêmes vérités. Nous avons déja remarqué que la parabole pouvoit être considérée comme une courbe qui tient le milieu entre l'ellipse & l'hyperbole; qu'on peut lui supposer deux foyers, ou tous les deux au-de-dans de sa concavité à une distance infinie l'un de l'autre, ou l'un au-de-dans & l'autre au-de-hors de cette courbe sur l'axe prolongé à l'infini. On verra cette propriété démontrée avec la derniere évidence & déduite immédiatement de cette construction. Comme la comparaison des sections coniques a été traitée amplement dans l'excellent ouvrage des sections coniques, de M. Le Marquis De L'hopital, & que cette partie n'est pas absolument essentielle dans des éléments, je ne suis point entré dans un plus grand détail sur les mêmes propriétés; & j'aurois supprimé entierement cette premiere description, si je n'avois voulu donner aux commençants une idée de la comparaison des courbes que nous avous examinées séparément dans les les trois premiers livres. J'ai tâché dans le

reste

reste du livre de donner les descriptions qui m'ont paru les plus expéditives & les plus abrégées selon les données du problême; persuadé que dans la pratique la facilité & la promptitude de l'opération, font tout le mérite des méthodes que l'on peut proposer. Toutes les machines dont je parle ensuite ont été tirées d'un livre latin de M. SCOOTEN professeur de mathématique à Leyde & connu particulierement par son commentaire sur la géométrie de DESCARTES. Cet ouvrage intitulé De organica sectionum conicarum descriptione, *n'a point encore été publié en entier dans aucun traité de sections coniques, quoique plusieurs aient donné quelques unes de ces machines. Après avoir parcouru ce petit traité, jai remarqué que toutes les machines qu'il donne sur la description de l'ellipse dont les diametres conjugués sont déterminés de grandeur & de position, que toutes ces machines dis-je, sont déduites de principes différents, tandis qu'elles pouvoient toutes se conclure les unes des autres, & d'une proposition qui se trouve dans le petit traité de la description des sections coniques de M. DE LA HIRE. C'est pourquoi je n'ai point fait difficulté de profiter des découvertes de l'auteur sans m'astreindre à sa méthode. De cette maniére j'évite l'examen d'une certaine machine par laquelle il commence, & qui devient très-ennuyeux par la multiplicité des cas qu'il faut éxaminer. A l'égard de toutes ces machines il faut convenir que laplupart deviennent presque inutiles dans la pratique à l'exception de celle qui est connue & éxécutée sous le nom de compas elliptique universel; parceque*

les autres pour la plûpart ne peuvent décrire que des portions d'ellipse; mais on est dédomagé par la curiosité des machines, & par une connoissance plus étendue sur les propriétés des sections coniques décrites par des mouvements continus. Ce n'est pas même le seul avantage que l'on retire de la considération de ces machines. J'ose me flatter d'en avoir déduit des descriptions plus simples que celles que nous avons vues jusqu'ici, en ne faisant usage que d'une seule ouverture de compas pour déterminer tous les points de l'ellipse; soit en me servant du petit ou du grand axe. Ce rayon est égal à la demi-différence des deux axes; mais comme il pourroit devenir incommode & sujet à erreur dans les cas ou cette différence est très-petite, je lui subsitue la demi-somme, par le moyen de laquelle on trouvera tous les points très-distinctement. Quand aux descriptions de l'hyperbole, comme on ne peut pas en imaginer de de plus courtes que celles qui sont connues de tout le monde & que l'on déduit des propriétés de cette courbe considérée entre ses asymtotes; les machines que je donne ensuite ne sont que de pure curiosité, & peuvent se rapporter à la description par des points réduite à un mouvement continu. On peut aussi remarquer que ces machines reviennent entierrement à ce que M. Descartes à dit sur la description de cette courbe dans sa Géométrie page 34. Je ne parle point des descriptions par les cordes, ou vulgairement apellées à la maniere du Jardinier, parceque ces descriptions se trouvent dans tous les livres de sections coniques, & que d'ailleurs elles ne peuvent être pratiquées

dans les opérations qui demandent une grande précision, comme dans la coupe des pierres où la construction des équations du troisiéme & quatriéme dégré. C'est par la même raison que j'ai supprimé entierement le compas parabolique du même autheur qui m'a paru trop compliqué pour être d'aucun usage. Cette partie ayant un rapport direct à tout ce qui s'appelle pratique, peut être regardée comme une des plus importantes de la géométrie, c'est pourquoi je m'y suis appliqué particulierement & je n'ai point aprehendé d'entrer dans certain détail, qui ne sera certainement pas trop long pour ceux qui veulent joindre aux méthodes la connoissance des principes sur lesquelles elles sont appuyées. J'ai eu principalement en vüe les Appareilleurs qui se trouvent souvent dans le cas de décrire des ellipses sur deux axes donnés, quoique cette courbe ne soit plus d'un usage aussi fréquent, depuis qu'on lui a substitué l'anse de panier à trois centres & dont les trois arcs sont chacuns de 60 dégrés. il seroit inutile de m'étendre ici sur toutes les parties des mathématiques dans lesquelles la description des sections coniques peut avoir lieu. Il suffit de dire en deux mots qu'on ne peut faire un pas dans la géométrie tant soit peut supérieure aux éléments sans en avoir besoin, & ce seroit perdre son temps que d'entreprendre de prouver l'utilité de ces courbes lorsqu'elle est aussi généralement reconnue.

On sera peutêtre surpris de trouver au commencement de ce quatriême livre une démonstration algébrique après avoir annoncé un traité synthétique, mais je prie de faire attention que ceux qui voudroient sen-

s'en tenir à la premiere, pourront passer la seconde, qui m'a paru absolument nécessaire pour satisfaire ceuxqui désirent toujours la derniere certitude dans une démonstration. D'ailleurs le calcul est assés simple pour être à la portée de ceux qui n'auroient que la connoissance des premiers éléments d'algébre.





DE LA DESCRIPTION

GE'OME'TRIQUE ET ME'CHANIQUE

DES SECTIONS CONIQUES.

LIVRE QUATRIEME.

PROBLÉME I.

424. L'*Axe* IT *d'une section conique quelconque & ses foyers* F, f *etant donnés* (*fig.* 111, 112, 113) *décrire chacune de ces courbes par une méthode uniforme pour toutes les trois.*

SOLUTION POUR LA PARABOLE.

425. Par le point *T* origine de l'axe on élevera une droite *TG* égale à la distance du même point *T* au foyer *F* : sur le prolongement de l'axe on prendra *TR* égal à *TG* : ayant ensuite mené la droite *RGD* par les points *R*, *D*; par tant de points que l'on voudra, on tirera parallélement à *TG* les droites *OD*, *FM*, *OD*, *OD*, &c. terminées à la ligne *RD* aux points *D*, *M*, *D*, *D*. Ensuite du point *F* comme

centre avec le rayon OD on décrira sur chaque OD prolongée de part & d'autre de l'axe, des arcs de cercle P, p qui donneront sur ces lignes les points de la parabole demandée.

Démonstration.

Par le point R soit menée parallélement à TG la droite RS, que nous avons déja nommée directrice (*art.* 5) : d'un point quelconque P soit menée une droite PQ paralléle à l'axe TF, & par conséquent perpendiculaire sur la directrice : à cause des parallèles DO, TG les triangles RTG, ROD sont semblables & donnent $RT : TG :: RO : OD$; mais $RT = TG$ *par construction*, donc $RO = OD$ ou FP : de plus RO est évidemment égal à PQ à cause du rectangle RP ; donc la courbe est une parabole, puisque les distances d'un de ses points à la directrice & au foyer sont égales, & que cette propriété est la définition même de la parabole *art. premier*. C. Q. F. D.

Solution pour l'Ellipse.

426. Aux extrémités I, T de l'axe IT, on élevera les perpendicnlaires à cet axe $TG = TF$ & $IL = IF$; par les points G, L on fera passer une droite GL qui rencontrera le prolongement de l'axe en un point R. Par des points O, O, O pris comme l'on voudra, on élevera les perpendiculaires OD, OD, OD terminées à la ligne GL : du point F comme centre sur

chaque *OD*, on décrira un arc de cercle *P* qui marquera sur cette ligne un des points de l'ellipse demandée.

Si l'on prend sur *GT* prolongée une partie *Gl*=*IL*, & sur *IL* aussi prolongée une partie *Ig*=*TG*; après avoir tiré *lg* qui rencontre l'axe prolongé en *r*, il est aisé de voir que l'on pourra par le moyen du foyer *f* & des *OD* prolongées en *d*, décrire une courbe semblable à celle qui passe par les points *D*, *D* &c.

Il faut encore remarquer que les droites *GL*, *gl* sont paralléles, car les droites *Gl*, *gL* sont égales & paralléles, *par construction* : de plus les droites *Gl*, *gL* ainsi que les paralléles *Dd* sont toutes égales au grand axe *IT*; car *TG*=*TF*, & *Tl*=*FI*, donc *TG*+*Tl*=*TF*+*FI*=*IT*. Cela posé il sera facile d'entendre la démonstration.

DÉMONSTRATION.

Par construction le point *P* déterminé sur chaque *OD* par le moyen du foyer *F* est éloigné du même foyer *F* de la quantité *OD*, ce qui donne *PF*=*OD*; & le point *p* déterminé sur la même ligne *OD* prolongée en *d*, par le moyen du foyer *f*, est éloigné du foyer *f* d'une quantité *pf*=*Od*; donc on aura *PF*, ou *pF*+*pf*=*dD*=*IT*. Donc le point *p* ou *P* est à l'ellipse dont *IT* est l'axe & dont les points *F*, *f* sont les foyers. C. Q. F. D.

On pourroit objecter contre cette démonstration, que nous avons supposé que les cercles décrits des points *F*, *f* comme centre avec les

rayons OD, Od se coupent aux points P, p; & que si cela n'arrivoit pas la courbe ne seroit pas une ellipse. On pourroit s'en convaincre par induction de plusieurs maniéres, mais comme cette méthode souffriroit peut-être encore quelque difficulté, j'ai mieux aimé démontrer cette partie par algébre, parçeque la démonstration synthétique auroit pû devenir trop compliquée en voulant démontrer les choses rigoureusement.

427. Pour démontrer que les cercles décrits des points F, f comme centre avec les rayons OD, Od se coupent en un même point P ou p à droite & à gauche de l'axe, il n'y a qu'à faire voir que les côtés OP, Op, des triangles rectangles FOP, fOp sont égaux. Pour cela soient nommées les lignes connues $IT = 2a$; TF ou $If = c$; FI sera $2a - c$. Les lignes TG, IL seront aussi c, & $2a - c$: la ligne TR sera nommée z, & TO sera x; donc IO sera $2a - x$. Cela posé pour avoir z, on se servira des triangles semblables RTG, RIL qui donnent $RT:TG :: RI:IL$, ou analytiquement $z : c :: 2a + z : 2a - c$, d'où l'on tire $2ac + cz = 2az - cz$, donc en faisant passer $+ cz$ dans le second membre $2ac = 2az - 2cz$ donc $z = \frac{2ac}{2a-2c} = \frac{ac}{a-c}$. présentement pour avoir OD ou PF on se servira des triangles semblables RTG, ROD qui donnent $RT:TG :: RO:OD$ ou PF, & analytiquement

$$\frac{ac}{a-c} : c :: \frac{ac}{a-c} + x : \frac{\overline{\frac{ac}{a-c} + x} \times c}{\frac{ac}{a-c}} = \frac{\overline{\frac{ac + ax - cx}{a-c}} \times c}{\frac{ac}{a-c}} =$$

$\frac{ac + ax - cx}{a}$, en multipliant le numérateur & le déno-

minateur par $a - c$ & divisant chaque terme par c. Le quarré de FP ou de la ligne OD sera donc $\frac{a^2c^2 + a^2x^2 + c^2x^2 + 2aacx - 2accx - 2acxx}{a^2}$; comme FO est égale à $c - x$, son quarré sera $cc - 2cx + xx$; ou en réduisant à la dénomination du quarré de FP, $\frac{aacc - 2aacx + aaxx}{aa}$. Donc on aura $EP^2 - FO^2$ ou $PO^2 = \frac{a^2c^2 + a^2x^2 + c^2x^2 + 2a^2cx - 2ac^2x - 2acx^2 - a^2c^2 + 2a^2cx - a^2x^2}{aa}$ ou en effaçant ce qui se détruit

$$PO^2 = \frac{c^2x^2 + 4a^2cx - 2accx - 2acxx}{aa}.$$

Pour avoir Od ou pf, je fais attention qu'en ôtant OD de Dd ou de IT qui lui est égal, j'aurai la valeur de cette ligne $Od = 2a \frac{-ac - ax + cx}{a}$; & en réduisant $2a$ au même dénominateur, $Od = \frac{2a^2 - ac - ax + cx}{a}$; donc le quarré de Od ou pf sera $\frac{4a^4 + a^2c^2 + a^2x^2 + c^2x^2 - 4a^3c - 4a^3x + 4a^2cx + 2a^2cx - 2ac^2x - 2acxx}{a^2}$.
fO se trouve égale à $2a - c - x$; donc $fO^2 = 4a^2 + c^2 + x^2 - 4ac - 4ax + 2cx$, ou en lui donnant a^2 pour dénominateur $fO^2 = \frac{4a^4 + a^2c^2 + a^2x^2 - 4a^3c - 4a^3x + 2a^2cx}{a^2}$: si l'on retranche le quarré de fO de celui de fp, on aura $pO^2 = \frac{c^2x^2 + 4a^2cx - 2accx - 2acxx}{aa}$; après avoir effacé ce qui se détruit. Cette valeur étant évidemment la même que celle de PO, il s'en suit que les cercles décrits des points f, F comme centre, avec les rayons OD, Od se coupent aux mêmes points P, p sur la droite Dd dont les parties OD, Od ont servi servi de rayon. C. Q. F. D.

Ce seroit la même démonstration si le point O *avoit été pris entre les deux foyers* F, f, *aulieu d'avoir été pris entre le foyer* F *&* *le point* T, *comme on le suppose ici.*

DÉFINITION.

428. Si l'on mene par les points *R*, *r* des droites *RS*, *rs* perpendiculaires à l'axe *IT*, ces lignes sont appellées *directrices* de l'ellipse *TMPIg*.

COROLLAIRE I.

429. Il suit de cette description de l'ellipse & de la définition précédente, qu'on pourroit la regarder comme une courbe dont chaque point *P* ou *p* est placé de manière, que ses distances l'une *PF* au foyer l'autre *PQ* à la directrice, sont toujours dans un rapport constant, qui est celui de *TG* à *RT*; car à cause des triangles semblables *ROD*, *RTG* on a *TG*:*RT*:: *OD*:*OR*; mais *PF*=*OD*, *par construction*, & *OR*=*PQ* à cause du rectangle *PQRO* : donc *TG* : *RT* :: *PF* : *PQ*. Il faut entendre la même chose du même point *P* par rapport au foyer *f* & à la directrice *rf*; car il il est évident que l'on a *pf* ou *Od*:*Or* :: *Ig*:*Ir*, puisque l'on peut déduire cette proportion de la similitude des triangles *xIg*, *rOd*.

COROLLAIRE II.

430. Il suit encore de-là que l'on peut considérer le cercle comme une espéce d'ellipse dont les directrices sont in finiment éloignées l'une de l'autre, & chacune à une distance infinie du foyer ; car puisque dans le cercle les *FP* sont toutes égales entr'elles, il faut pour conserver le rapport constant, que les *PQ* soient aussi

toutes égales entr'elles; ce qui ne peut arriver à moins qu'on ne les suppose toutes infinies ou, ce qui revient au même, à moins que la directrice ne soit à une distance infinie du foyer qui devient le centre du cercle.

SCHOLIE.

431. Il est aisé de reconnoître que la courbe ne peut avoir aucun de ses points au-de-la des extrémités de l'axe *IT*. Car si l'on mene une une ligne *doD* entre les points *R*, *T*; il est aisé de voir que la ligne *od*, est plus courte que *fo*, & partant le cercle décrit du rayon *od* ne pourra pas couper ni même toucher la ligne *doD* en aucun point; pour s'en convaincre on fera attention que les *fO* croissent plus rapidement que les *Od*, parceque leurs accroissements *oT*, *dK* sont dans la raison de *rI* à *Ig*, comme il est évident à cause des triangles semblables *rIg*, *lKd* & puisque d'ailleurs *RI* est plus grand que *Ig*, par la même raison que *rT* est plus grand que *Tl*: donc puisque $Tf = Tl$ (*construction*), en ajoûtant une plus grande ligne *oT* à *Tf* que celle *dK* que l'on ajoûte à *Ko*, on aura *fo* plus grand que *od*; ce qui suffit pour que l'ellipse soit fermée en *T*; on feroit voir de la même maniere qu'elle est fermée en *I*; tout cela ne souffre aucune difficulté.

SOLUTION POUR L'HYPERBOLE.

432. Aux extrémités *I*, *T* de l'axe donné on élevera les droites $IL = IF$ & $TG = TF$ perpen-

diculaires à l'axe l'une d'une côté & l'autre de l'autre côté du même axe. On menera la droite LG prolongée indéfiniment, ensuite par tant de points O, o qu'on voudra on menera des perpendiculaires OD à l'axe terminées en D à la ligne LG, & indéfinies de l'autre côté de l'axe, sur lesquelles on marquera les points P, p en décrivant du foyer F des arcs de cercles sur chacune avec le rayon égal à la ligne OD sur laquelle on les décrit. Je dis que ces points seront à une hyperbole dont IT est l'axe & F, f les foyers

DÉMONSTRATION.

On fera attention que l'on auroit pû prendre $Ig = If$ & $Tl = fT$, & qu'en tirant gl qui se trouve paralléle à GL, on auroit pû déterminer les points P, p par le moyen de cette ligne gl, du foyer f & des lignes Od, Od. Car on feroit voir comme dans l'ellipse (*art.* 427.) que les cercles décrits des rayons OD, Od & des foyers F, f comme centre, se coupent aux mêmes points P, p sur la même ligne ODd dont les parties ont servi de rayon ; on remarquera de plus que les paralléles Dd sont toutes égales à l'axe IT car on a (*par construction*) $Tl = Tf$ & $TG = TF$ ou If; donc $Tl - TG = Tf - fI = IT$ & partant toutes les parallèles Dd qui sont égales à Gl seront aussi égales à l'axe IT. Cela posé parceque le point P a été déterminé par le fôyer F & la ligne GL, on a $FP = OD$, & parceque ce même point P auroit pû être déterminé par

la ligne gl & le foyer f, on aura $Pf = Od$, donc $Pf - PF = Od - OD = Dd$ ou IT, donc la courbe est une hyperbole, puisque la différence des distances d'un de ses points aux foyers est toujours égales à l'axe IT. C. Q. F. D.

Corollaire I.

433. Il suit de cette construction qu'ayant mené par les points R, r de l'axe les perpendiculaires RS, rs que nous appellerons *directrices* de l'hyperbole, il suit dis-je que cette courbe est telle que les distances de chacun de ses points l'une PF au foyer, l'autre PQ à la directrice, sont toujours entr'elles dans un rapports constant qui est celui de TG à RT. Car à cause des triangles semblables RTG, ROD on a $TG : RT :: OD : RO$, mais $OD = FP$ & $RO = PQ$ donc $TG : RT :: FP : PQ$. On démontreroit de même que $Pf : Pq :: Tl : Tr$ ou $:: TG : TR$ en se servant des triangles semblables rOd, RTG.

Corollaire II.

434. Il suit encore de-là que les OD ou les Od croissent plus rapidement que les FO ou les fO correspondantes. Car puisque $IL = IF$; on aura IL plus grand que IR & à cause des triangles semblables RTG, RIL; TG sera plus grand que RT; donc si l'on tire lK paralléle à l'axe IT on aura encore à cause des triangles semblables lKd, RTG, dK plus grand que Kl, ce qui fait voir que la ligne Tl devenue Fd a plus

augmenté que la ligne *RT* devenue *RF*; & comme les *OD* ou les *Od* croîteront toujours plus rapidement que les *FO*; il suit de-là que les cercles décrits du point *F* comme centre avec le rayon *OD* couperont toujours les lignes *OD* en quelque point, & par conséquent l'hyperbole s'étend à l'infini à droite & à gauche de l'axe. Par la même raison, les *oD* prises du côté du foyer *f* seront toujours plus grandes que les *Fo*; puisque *FI* est égale à *IL*; & partant l'hyperbole s'étend aussi à l'infini du côté du foyer *f*.

SCHOLIE.

435. On démontreroit aussi par le même principe, que l'hyperbole ne peut avoir aucun de ses points sur les *O' D'* qui se trouveroient entre les points *I*, *T*; car *O' D'* est alors plus petit que *FO'*, & *O' d'* est plus petit que *fO'*, ce qui suffit pour qu'on ne puisse trouver aucun point de l'hyperbole.

COROLLAIRES ET PROPRIÉTÉS.

Communes à toutes les Sections coniques déduites de la construction precédente.

COROLLAIRE I.

436. Il suit de ce que nous venons de voir, qu'on peut appeller section conique toute coube telle que les distances de chacuns de ses points l'une *PF* au foyer *F*, l'autre *PQ* à la directrice de cette courbe sont toujours dans un rapport

constant. La section sera une parabole, si le rapport est celui d'égalité; une ellipse, si PF est plus petit que PQ; une hyperbole, si PF est plus grande qne PQ.

Corollaire II.

437. Donc une section conique est une parabole, une ellipse, ou une hyperbole selon que le foyer est autant, moins, ou plus éloigné du sommet que la directrice; car dans la parabole $TF = RT$ dans l'ellipse $TF < RT$, & dans l'hyperbole $TF > RT$. On peut encore dire qu'une courbe sera une parabole, une ellipse, ou une hyperbole, lorsque l'angle TRG sera égal, plus petit, ou plus grand qu'un angle de 45 dégrés; cela revient précisément au même.

Corollaire. III.

438. L'Angle GRT ne peut croître que depuis zéro jusqu'à 90 dégrés; nous avons dêja vû (*art.* 430) que dans le cas où cet angle est infiniment petit, l'ellipse devient un cercle: si cet angle est presque égal à 90 dégrés; il est le plus grand possible; & alors l'hyperbole devient une ligne droite: pour s'en convaincre, on remarquera que si l'angle GRT est presque droit la ligne GR sera presque paralléle à la ligne GT & partant les lignes FR, FM ne concourent qu'à une distance infinie, donc la courbe devient une ligne droite. On peut encore reconnoître cette vérité d'une autre maniere.

l'angle *GRT* & son opposé au sommet *IRL* ne peuvent presque être droits que les lignes *RT*, *RI* ne sont infiniment petites par rapport aux lignes *GT*, *IL* qui sont les distances des extrémités de l'axe au foyer *F*; donc l'axe *IT* sera infiniment petit par rapport à ces distances & pourra être regardé comme zero, & supposant toujours que la courbe est une hyperbole si l'on mene d'un point *P* aux foyers *F*, *f* les lignes *PF*, *Pf* on aura $PF-Pf=IT=0$; donc $PF=Pf$, c'est-à-dire que l'hyperbole devient une ligne droite. On peut conclure de-là que la courbure d'une hyperbole sera d'autant moindre que les foyers seront à une plus grande distance du sommet & que l'axe sera plus petit.

Corollaire IV.

439. Il suit encore de-là que le cercle & la ligne droite sont les deux extrêmes de toutes les sections coniques, dont la parabole est le milieu; puisque le cercle répond à l'angle *GRT* infiniment petit la parabole a cet angle supposé de 45 dégrés, & la ligne droite a un angle droit.

Corollaire V.

440. Si l'on fait attention à la maniere dont on a déterminé la ligne *GL* dans l'ellipse & dans l'hyperbole, on verra encore aisément que la parabole tient le milieu entre l'ellipse & l'hyperbole, ou ce qui revient au même, que l'on

peut

peut supposer à cette courbe deux foyers, tous tous les deux au-de-dans de l'axe à une distance infinie l'un de l'autre; auquel cas la parabole est la derniere des ellipses possibles; ou, l'un au-dedans & l'autre au-dehors sur l'axe prolongé à l'infini; & dans ce cas elle peut être regardée comme la premiere hyperbole possible. Pour avoir les deux points *G*,*L* de la ligne *RGK* dont le prolongement ou l'intersection avec l'axe détermine l'origine de la directrice; aux extrémités *I*, *T* de l'axe on a élevé les perpendiculaires *GT*, *IL* égales aux distances *TF*, *IF*; mais dans la parabole *FI* est infinie; donc *IL* est aussi infinie &, le triangle rectangle *RIL* devient isocele, puisque *RF* étant une quantité finie ajoutée ou retranchée d'une grandeur infinie ne peut y faire de changement: donc l'angle *TRG* doit être de 45 dégrés. C'est ce que l'on peut reconnoître par l'expression de *RT* trouvée à l'article 427, où nous avons z ou $RT = \frac{ac}{a-c}$; dans le cas de la parabole $a-c$ devient, a puisque c qui est *TF* étant d'une grandeur finie combinée avec l'infini par soustraction ou par addition ne peut l'augmenter ni le diminuer: donc $TR = \frac{ac}{a} = c$ ou *TF*.

Corollaire. VI.

441. Dans une section conique quelconque, la droite *RGL* est évidemmment tangente à la courbe à l'extrémité *M* de l'ordonnée *FM* qui passe par le foyer. Car il est évident que lorsque *OD* devient *FM*, la ligne *FP* devient

auffi *FM*, & partant le point *M* eft le feul qui puiffe appartenir à la courbe & à la droite *RGM*.

COROLLAIRE VII.

442. Il fuit encore de-là que toutes les fections coniques décrites dans un même angle *GRT*, ou dans des angles égaux, feront des courbes femblables ; car de cette fuppofition il fuit clairement que leurs axes feroient proportionels aux diftances des foyers : c'eft pour cette raifon que tous les cercles & toutes les paraboles font des figures femblables, parceque tous les angles de 45 dégrés font égaux, & que toutes les lignes paralléles font des angles égaux entr'elles, puifqu'elles font toutes cenfées ne concourir qu'à l'infini.

COROLLAIRE. VIII.

443. Il fuit encore de-là que fi l'on a, dans une fection conique quelconque, la directrice & l'axe de cette courbe, on pourra aifément déterminer les foyers de chacune : il n'y aura qu'à divifer l'axe donné *IT* dans la raifon de *RT* à *RI*, ou, ce qui eft la même chofe, il n'y aura qu'à faire cette proportion *RT*:*IR*::*FT*:*FI*: or on fcait, par les éléments, couper une ligne quelconque dans une raifon donnée : donc on pourra trouver les foyers par la connoiffance de l'axe & de la directrice. Dans le cercle les lignes *RT*, *IR* font égales & infinies ; ainfi *FT*=*FI* : donc le cercle n'a qu'un foyer qui

est au milieu de son diametre ; au lieu que l'ellipse & l'hyperbole en auront toujours deux, parceque l'on peut toujours diviser une ligne donnée en raison donnée de deux manieres, & qu'il n'y en a qu'une pour la diviser en deux parties égales. Dans la parabole $IR = FI$, puisque ces deux lignes sont infinies : donc $RT = FT$: ainsi cette analogie est vraie pour toutes les sections coniques.

Je n'insisterai pas davantage sur la comparaison des sections coniques ; je passe à d'autres descriptions qui sont plus commodes dans la pratique, & par conséquent préférables à celle-ci.

PROBLÊME. II.

444. *Deux diametres conjugués quelconques d'une section conique étant donnés de grandeur & de position ; décrire chacune de ces courbes.*

SOLUTION POUR LA PARABOLE.

445. Comme cette courbe n'a point de diametres conjugués, le problême général, que nous venons de proposer, se réduit à celui-ci.

Un diametre quelconque AG, *son parametre* AB *& l'angle* PAB *des ordonnées à ce diametre étant donnés ; décrire la parabole* (*fig.* 114).

Par le point B origine du diametre BI, on élevera une perpendiculaire BE à ce même diametre : ensuite avec des rayons variables tels que cA, BA, dA on dècrira des demi cercles

tels que *ACG*, *ADH*, *AEI* qui couperont le diametre aux points *G*, *H*, *I* & la perpendiculaire au diametre aux points *C*, *D*, *E*; par les points *G*, *H*, *I* du diametre on menera des lignes indéfinies *lGL*, *mHM*, *nIN* paralléles à *AP*, sur lesquelles on prendra, à droite & à gauche du diametre, les lignes *GL*, *HM*, *IN* égales aux parties *BC*, *BD*, *BE* de la ligne *BK*, & formées sur cette ligne par les cercles correspondants; je dis que la courbe qui passera par tous les points *L*, *M*, *N* sera une parabole.

DÉMONSTRATION.

Par la propriété du cercle $BC^2 = AB \times BG$, & de même $BD^2 = AB \times BH$, & par la même raison $BE^2 = AB \times BI$: donc on aura $BC^2 : BD^2 : BE^2 :: AB \times BG : AB \times BH : AB \times BI$, ou, en divisant par la ligne *AB*, & mettant au lieu de BC^2, BD^2, BE^2 leurs égales GL^2, HM^2, IN^2, on aura $GL^2 : HM^2 : IN^2 :: BG : BH : BI$; c'est-à-dire que les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les abscisses: donc la courbe est une parabole, de plus cette parabole a pour parametre la ligne *AB*, puisque $GL^2 = AB \times BG$, & d'ailleurs les ordonnées font avec le diametre l'angle demandé; puisqu'elles sont paralléles à *AP*, donc cette parabole a toutes les conditions requises. C. Q. F. T. & D.

SCHOLIE.

446. Il est aisé de voir que cette construction

pourroit avoir lieu dans le cas où le diametre donné seroit l'axe: il n'y a dans ce cas qu'à mener des lignes *G L*, *H M* perpendiculaires à cet axe, & achever le reste comme dans le construction précédente.

447. *Si au lieu du parametre on donnoit un point de la parabole; on pourroit décrire la courbe demandée de plusieurs manieres.*

SOLUTION. I.

Soit la ligne *AH* le diametre donné (*fig.* 115) la ligne *AT* tangente à l'origine de ce diametre, & qui détermine l'angle des ordonnées avec le point *P*, que l'on suppose un point de la parabole. On prolongera le diametre vers *D*, & l'on prendra sur le prolongement les parties *AB*, *BC*, *CD* égales entr'elles & de quelle grandeur on voudra; par le point *P*, on menera une droite *PS* terminée à la tangente *AT* en *S*, & paralléle à *AH*; à commencer du point *S* en allant vers *P*, on prendra des lignes *Sb*, *bc*, *cd* égales entr'elles & aux parties *AB*, *BC*, *CD*. Par le point *A*, & les points *b*, *c*, *d* on tirera les droites indéfinies *Ab*, *Ac*, *Ad*; par le point *P* & les points *B*, *C*, *D* on menera pareillement les droites *PB*, *PC*, *PD* qui couperont les premieres aux points *R*, *N*, *M*; si l'on fait passer une courbe par ces points & tous les autres trouvés de la même maniére, je dis que ces points seront à une

parabole, dont AH est un diametre & dont le point P est un des points de la courbe.

DÉMONSTRATION.

Par le point M, où la ligne PB coupe la ligne Ab, soit menée la ligne MF paralléle au diametre AH & la droite MO paralléle à AS; à cause des triangles semblables AFM, ASb; BAM, PbM on a ces deux proportions, $FM:Sb$ ou $AB::AF:AS$, & $AB:Pb::AM:Mb$, donc on aura *componendo* $AB:AB+Pb::AM:AM+Mb$; & *reduisant*, $AB:PS::AM:Ab::AF:AS$; car il est évident que $AB+Pb=Sb+Pb$ puisque $AB=Sb$, *par construction*, donc on aura ces deux proportions;

$$FM:AB::AF:AS$$
$$AB:PS::AF:AS$$

& en les multipliant par ordre, on aura, après avoir divisé chaque terme de la premiere raison par AB, $FM:PS::AF^2:AS^2$. Mais à cause des des parallélogrammes AM, AP; $AF=MO$ & $AS=PK$, & de même $FM=AO$, & $PS=AK$; donc $AO:AK::OM^2:PK^2$, d'où il suit évidemment que la courbe est une parabole, puisque les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les abscisses correspondantes; d'ailleurs ces ordonnées sont paralléles à TA & font avec le diametre un angle égal à l'angle demandé; donc cette parabole est la parabole qu'il falloit décrire. C. Q. F. T. & D.

Si le point d'interſection ſe trouvoit au-de-là du point P par rapport au diametre, comme en R; alors la ligne SP eſt plus petite que la ligne Sd: ainſi au lieu d'un *componendo* il faut faire un *dividendo*; d'ailleurs la démonſtration eſt toujours à peu près la même; car à cauſe des triangles ſemblables ATR, ASd, on a $TR : Sd$ ou $AD :: AT : AS$; & à cauſe des triangles ſembl. DAR, PdR on a $AD : Pd :: AR : dR$; donc *dividendo* $AD-Pd$ ou $Sd-Pd : AD :: AR-dR : AR$ & réduiſant $SP : AD :: Ad : AR :: AS : AT$, d'où l'on déduit $AD : SP :: AT : AS$; mais on avoit ci-devant $TR : AD :: AT : AS$, donc multipliant par ordre, & diviſant les deux premiers termes par AD, $TR : SP :: AT^2 : AS^2$, d'où il ſuit que le point R eſt encore à la parabole, puiſque les quarrés AT^2, AS^2, ou leurs égaux RH^2, PK^2 ſont entr'eux comme les abſciſſes correſpondantes AH, AK égales aux lignes TR, PS qui leur ſont paralléles.

REMARQUE

Sur cette premiere ſolution.

448. *Nous avons trouvé dans cette démonſtration les deux proportions ſuivantes* $FM : AB :: AF : AS$, & $AB : PS :: AF : AS$; *donc* $FM : AB :: AB : PS$; *donc* $AB^2 = FM \times PS = AO \times AK$ *puiſque les lignes* FM, PS *ſont égales reſpectivement aux lignes* AO, AK *auxquelles elles ſont paralléles. Il ſuit de-là, que ſi par les points* P, M *où une ſécante coupe une parabole on mene à un diametre quelconque les ordonnées* PK, MO; *la partie* AB *du diametre*

prolongé comprise entre son origine & la rencontre de la secante, est moyenne proportionelle entre les deux abscisses AO, AK. *Donc si la secante se meut parallélement à elle-même jusqu'à ce qu'elle devienne tangente, la partie du diametre comprise entre l'origine de ce diametre & la tangente, sera égale à l'abscisse de l'ordonnée menée par le point de contact: c'est ce que nous avons déja démontré en faisant voir que toute sou-tangente est double de l'abscisse dans la parabole.*

II Solution.

449. Par le point *P* on menera la ligne *PKp*; paralléle à la tangente *AS* (*fig.* 116); sur laquelle on prendra *Kp*=*KP*, & après avoir tiré les lignes *AP*, *Ap*; par des points *B*, *C*, *D* pris comme l'on voudra sur la ligne *PK*, on menera les droites *BM*, *CN*, *DO* paralléles au diametre donné *AK* & qui couperont le côté *AP* aux points *E*, *G*, *I* par lesquels on menera parallélement au côté *Pp* les droites *EF*, *GH*, *IL* terminées au diametres *AK* aux points *L*, *H*, *F*: enfin par le point *p* & les mêmes points *L*, *H*, *F* on menera les droites *pFO*, *pHN*; *pLM* qui donneront sur les droites *DE*, *CG*, *BI*, les points O, *N*, *M* de la parabole demandée.

La démonstration de cette solution est précisément la même que celle de la derniere proposition de la parabole; c'est pourquoi nous ne la répeterons pas ici. (*voyez l'art.* 113).

REMARQUE
sur cette seconde Solution.

450. *Comme cette solution est une description des plus simples de la parabole, il est apropos de s'en servir préférablement aux autres. Ainsi quoique nous n'ayons pas supposé la connoissance des foyers, ou d'un diametre quelconque & de son parametre, on pourra en faire usage dans ces différents cas; car le parametre détermine la parabole, comme le point que l'on a supposé donné, pourvû qu'on ait aussi l'angle des ordonnées. Il faut entendre la même chose de la connoissance du foyer sur l'axe dont l'origine est déterminée; d'où il suit que l'on pourra se servir de cette construction dans presque tous les cas possibles.*

Nous ne parlerons point des machines qui ont été imaginées pour la description de cette courbe : elles sont si imparfaites dans la pratique, que l'on doit préférer les descriptions par des points, à des mouvements continus.

SOLUTION POUR L'ELLIPSE.

451. *Soient* AB, DE (*fig.* 117 & 118) *deux diametres conjugués donnés de grandeur & de position, on demande de décrire l'ellipse par plusieurs points.*

I SOLUTION.

Par l'extrémité *D* de l'un des diametres donnés soit menée la ligne *DP* perpendiculaire à

son conjugué *AB*. On prolongera cette ligne d'une grandeur indéfinie (*fig.* 118) & l'on prendra sur cette perpendiculaire *DP*, audessus ou audessous du point *D*, une partie *DQ* égale à la moitié du diametre *AB* : ensuite par le centre *C* & le point *Q* on tirera la ligne *CQ* prolongée indéfiniment à droite & à gauche du centre *C* : par un point *O* du diametre *DE* ayant mené les lignes droites *OS* paralléle à *CA* & *OI* paralléle à *DP*, du point *G* où cette ligne rencontre *CQ* comme centre, avec un rayon $GS = CA$, on décrira un arc de cercle vers *S* qui coupera la ligne *OS* dans un point *S*; je dis que ce point appartient à l'ellipse dont *AB*, *DE* sont les diametres conjugués.

DEMONSTRATION.

A cause des triangles semblables *CDQ*, *COG* formés par les paralléles *DQ*, *GO* on a $CD^2:CO^2::DQ^2$ ou GS^2 ou $CA^2:OG^2$; mais à cause du triangle rectangle *GOS* on aura aussi $OG^2=GS^2-OS^2$, & parceque $CA=GS$ & que $CR=OS$ à cause des paralléles *CD*, *RS* qui les renferment, on aura $OG^2 = CA^2 - CR^2 = AR \times RB$: donc en mettant RS^2 à la place de CO^2, & $AR \times RB$ à celle de OG^2, la premiere proportion deviendra $CD^2:RS^2::CA^2:AR \times RB$, ou *alternando* & *invertendo* $RS^2:AR \times RB::CD^2:CA^2$; d'où il suit évidemment que la courbe est une ellipse. C. Q. F. D.

REMARQUE

sur cette premiere Solution.

On remarquera en général sur cette premiere solution, que la ligne RS *parallele à* CD *coupera toujours le diametre* AB *dans un point* R, *entre le centre* C *& son extrémité* A: *car à cause du triangle rectangle* GOS, GS *est plus grand que* SO, *côté de l'angle droit dont* GS *est l'hypotenuse; donc* CA *qui est égale à* GS, *sera aussi plus grand que* CR, *ou son égale* OS.

II SOLUTION.

452. Après avoir déterminé la ligne *CQ* comme dans la solution précédente; (*fig.* 117 & 118) par quelque point *G* de cette ligne pris pour centre avec un rayon $GF = PQ$ on décrira un arc de cercle qui coupera le diametre *AB*, prolongé s'il est nécessaire, dans un point *F*; si l'on tire *FG* & qu'on prenne sur le prolongement de cette ligne $GS = DQ$, le point *S* sera un des points de l'ellipse demandée.

DÉMONSTRATION.

Soit menée par le point *G* la ligne *IGO* paralléle à *DP*; les paralléles *DP*, *OI* seront coupées proportionellement par la droite *CQ* & donneront $PQ : GI :: DQ : OG$; mais, *par hypothése* $GF = PQ$ & $DQ = GS$ ou *CA*, donc $GF . GI :: GS ; GO$, d'où il suit que la ligne *OS*

qui joint les points *O*, *S* est parallele au diametre; & partant cette construction revient à la précédente, & le reste se démontreroit de la même maniere.

SCHOLIE.

453. Commme le cercle décrit du rayon *GF*=*PQ* coupe toujours la ligne *AB* en deux points; tant que le point *G* ne se trouve pas dans la perpendiculaire *PQ*, on aura par une même opération deux points audessus du diametre *AB*; il n'est pas moins évident que l'on peut trouver deux points audessous du même diametre, en prenant les points *G* sur le prolongement de la ligne *C q* comme en *g*. Il suit encore de cette construction que le lieu de tous les points *G* est compris entre le point *C* & le point *Q*; car si on les prenoit audelà de *Q* par rapport au centre *C*, le rayon *GF* ne pourroit plus couper ni toucher le diametre *A*B, & partant on ne pourroit plus trouver aucun point à la courbe.

I. OBSERVATION.

454. Il est aisé de reconnoître que l'on peut encore se servir de cette construction, dans le cas où les lignes *AB*, *DE* seroient les axes de l'ellipse (*fig.* 119 & 120): alors la perpendiculaire *DP*, se confond avec l'axe *DE*, aussi la ligne *DQ* doit être prise sur l'axe *DE* lui-même prolongé autant qu'il est nécessaire, le

rayon GF dont on s'est servi dans les figures 117 & 118 devient égal à la somme ou à la différence des mêmes demi-axes. Il est encore visible que les points G doivent être pris dans les figures 119 & 120, sur la ligne CQ, & que le lieu de tous ces points est égal à la ligne CQ elle-même.

OBSRVATION II.

455. Tout ce que nous venons de voir a rapport à la derniere solution : si l'on vouloit dans le cas où les diametres sont les axes de l'ellipse, comme on le suppose, trouver le point O qui ne peut être déterminé comme dans les figures précédentes, voici ce qu'il faudroit faire. Après avoir marqué sur un rayon quelconque GF [illegible] point S tel que $GS = DQ$ ou AC, on menera par ce point les lignes SO paralléles à AB & SR paralléle à CD, & de cette maniere le point O sera celui qui répond au point O déterminé comme on a vu dans les fignres 117 & 118. Cette construction supposée, il est aisé de démontrer directement & indépendamment de la solution générale que le point S est un des points de l'ellipse dont AB & DE sont les axes : car à cause du triangle rectangle GSO, on a $GO^2 = GS^2 - SO^2 = CA^2 - CR^2$, puisque, *par construction*, $GS = CA$, & que $SO = CR$: donc $GO^2 = AR \times CR$, *par le Lemme fondamental*, donc on aura à cause des triangles rectangles sem-

blables RSF, OGS, $RS^2 : GO^2$ ou $AR \times RB$ :: FS^2 ou $CD^2 : GS^2$ ou CA^2. C.Q.F.D.

COROLLAIRE I.

456. Il suit de la derniere solution générale que si dans un angle quelconque FCQ (*fig.* 117 & 118) on fait mouvoir une droite constante GF de maniere que ses deux extrémités touchent continuellement les deux côtés de cet angle, & qu'il y ait sur cette droite prolongée, (*comme dans la figure* 117) ou non (*comme dans la figure* 118) un point S tel que les parties GS, GF soient inégales, ce point S décrira une ellipse dont les lignes GS & DC seront les demi-diametres conjugués, tandis que la regle GF parcourera les quatres angles qui sont autour du point C, de maniere que ses extrémitées G, F soient toujours sur les côtés des mêmes angles.

COROLLAIRE. II.

457. Si l'on suppose le point S au milieu de GF, & deplus l'angle dans lequel se fait le mouvement de 90 dégrés, la courbe décrite dans ce mouvement sera un cercle, puisque les deux demi-diametres conjugués seront égaux, & que l'angle des ordonnées est droit. Ainsi l'on pourroit se servir de cette méthode pour décrire un cercle dont le rayon seroit trop grand pour être décrit avec le compas ordinaire. Si l'angle est aigu, dans la même

ſuppoſition, la courbe ne peut toujours être qu'une ellipſe.

Conſtruction d'un Compas elliptique univerſel.

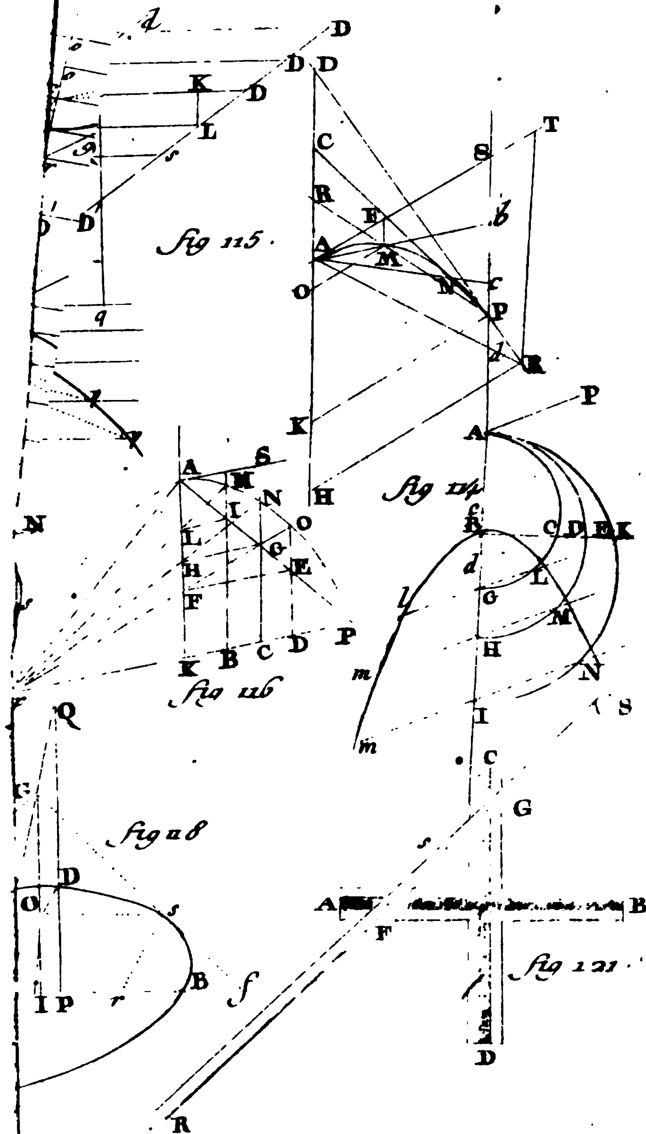
458. On déduit de cette ſolution une conſtruction très-ſimple & très-facile d'un compas elliptique que l'on peut appeller univerſel, parcequ'il peut ſervir à décrire toutes ſortes d'ellipſe, par un mouvement continû. Comme cette machine eſt la plus parfaite de celles qui ont été imaginées en ce genre, nous en donnerons une explication plus détaillée que des autres dont nous aurons à traiter par la ſuite.

AB & *CD* (*fig.* 121) ſont deux regles de laiton jointes enſemble & d'équerre l'une à lautre. On a pratiqué dans chacune une petite reinure plus large vers le bas que vers le haut & qui peut avoir environ le tiers de la largeur de la regle vers le haut. Dans chacune de ces couliſſes on inſere une petite piéce de cuivre mobile dans toute la longueur de cette couliſſe. Cette petite piéce porte ſur ſon milieu un petit axe parfaitement rond & poli, deſtiné à paſſer dans un trou de même diametre pratiqué dans une regle d'acier comme *RS*. On fixe la regle par le moyen de ces deux petits axes, & pour empêcher qu'elle ne ſe dérange dans le mouvement, on l'arrête par une petite goupille qui traverſe les deux axes. Cette regle d'acier porte à ſon extrémité un

petit ſtile, où l'on peut adapter une plume ou un crayon, & à l'autre extrémité *R*, on peut y pratiquer un petit bouton qui puiſſe ſervir à faire mouvoir plus commodément cette même regle. Cela poſé, ſi l'on pouſſe la regle *RS* de *R* vers *B*, la petite piéce *F* mobile dans la reinure *CD*, ne peut obéir à ce mouvement qu'en avançant de *C* vers *D*, & par le même moyen fait monter la ſeconde *G* dans la couliſſe *BA* de *B* vers *A*. De cette maniere lorſque chaque piéce a parcouru dans ſa regle à droite & à gauche du centre de la croix une ligne égale à *FG*, le point *S* a décrit une ellipſe dont *GS* & *FS* ſont les deux demi-axes, car il eſt évident que cette regle a toujours eu ſes deux points *F*, *G* dans les côtés de l'angle droit.

Il eſt aiſé de reconnoître que la petite piéce mobile *G* ne peut pas monter plus haut dans la couliſſe *AB* que d'une quantité égale à *FG*, c'eſt-pourquoi l'on ſe contente dans la conſtruction de cette machine de faire les regles *AB* ou *CD* chacune un peu plus que double de *FG*. Il faut pour que la machine ſoit éxacte que les trois points *F*, *G*, *S*, c'eſt-à-dire, les deux pivots & le point décrivant ſoient dans une même ligne droite. Sans cela la coube décrite ne ſeroit pas décrite ſur les axes qui ſont les ilgnes les plus faciles à déterminer. Si l'on veut ſe ſervir de cette machine pour décrire toutes ſortes d'ellipſes, il faut que le

porte


fig 115.
fig 114
fig 116
fig 118
fig 121

crayon *S* puisse s'approcher ou s'éloigner des points *F*, *G*; car il est visible par tout ce qu'on a démontré jusqu'ici, que les ellipses varient dans le rapport de leurs axes. Mais si l'on veut décrire des ellipses semblables par le moyen de la même machine, il faut aussi que l'un des points *F*, *G* soit mobile, c'est-à-dire qu'on puisse augmenter ou diminuer la distance *FG* dans quel rapport on voudra. Car lorsqu'il n'y a que le point *S* de mobile, on ne peut qu'augmenter ou diminuer le grand axe, sans toucher au petit; aulieu que pour décrire une ellipse semblable, il faut allonger ou raccourcir chaque demi-axe dans la même proportion. On a eu égard à tout cela dans la construction du compas elliptique tel qu'il se trouve chez les ingénieurs pour les instruments de mathématiques.

459. Si le point *S* étoit entre les points *G*, *F* comme en *s*, il est visible que dans le mouvement de la regle *FG*, ce point décriroit une ellipse : mais cette machine n'a pas les mêmes avantages que la précédente, & l'on ne peut décrire avec elle que des portions d'ellipse, parceque le stile *s* se trouveroit empêché dans son mouvement à la rencontre des branches de la croix.

COROLLAIRE. III.

460. Puisque la ligne *GF* est une ligne constante (*fig.* 122 & 123) & que d'ailleurs elle

fe meut dans un angle conftant, on peut la regarder comme la corde de l'angle dans lequel elle fe meut. De plus, comme dans un cercle quelconque la corde qui foutient le petit fegment eft la même que celle du grand; dans toutes les pofitions de la ligne *GF*, dans l'angle *DCA*, ou dans fon fupplément *DCB*, le cercle qui paffera par les trois points *G*, *C*, *F* fera toujours le même. Il fuit encore de-là que le centre du même cercle fera toujours à égale diftance du centre *C*, & par conféquent décrira un cercle autour du centre de l'ellipfe; tandis que le point *S* décrira l'ellipfe dont *AB* & *DE* font les diametres conjugués.

N. B. Ce Corollaire eft de la derniere importance, pour bien comprendre tout ce que nous dirons dans la fuite de ce livre, fur la defcription des ellipfes dont on a les axes ou les diametres conjugués: c'eft-pourquoi il faut le relire, jufqu'à ce qu'on le conçoive parfaitement.

Corollaire IV.

461. Il fuit du dernier corollaire, que l'on peut aifément fupprimer un des côtés de l'angle dans lequel on fait mouvoir la regle qui porte le point décrivant; (*fig.* 122 & 123) pourvû que l'on fubftitue une autre ligne qui foutienne cette ligne conftante *GF*, de la même maniere qu'elle étoit foutenue par la droite fupprimée. Pour cela, imaginons que l'on ait trouvé le centre *O* ou *o* du cercle qui paffe par les trois

points G, C, F; ou G, C, f & que de ce centre on ait mené aux mêmes points & au point S les droites OG, OC, OF, OS; cela posé, puisque le rayon CO est une ligne constante, comme on l'a démontré dans l'article précédent, & que d'ailleurs, par hypothese, la ligne GF est aussi une ligne constante; le triangle GOF sera toujours le même, & son sommet O sera toujours dans la circonférence décrite par le rayon CO, tandis que l'angle F de sa base parcourera la ligne FCA; ainsi on pourroit supprimer la ligne CD, & décrire l'ellipse par le moyen du triangle GOF, comme on la décrivoit auparavant par le moyen des lignes AB, CD, puisque la ligne FGS se trouve toujours dans le même mouvement. Par la même raison, on peut se servir du triangle FOS en gardant toujours la ligne AB, & supprimant la ligne DC: mais si l'on vouloit se servir du triangle GOS qui maintint toujours le point O dans la circonférence décrite par le rayon CO, il est évident que dans ce cas il faut supprimer la ligne CB & se servir de la ligne CD, puisqu'alors le triangle GOF devenant inutile, son angle F n'a plus besoin de ligne pour se soutenir, & que d'ailleurs si on le laisse subsister, la ligne GF sera toujours müe de la même maniere, par le moyen des lignes constantes GO, GS, OS qui forment toujours le même triangle, & des lignes CD & CO.

conjugués sont donnés de grandeur & de position.

PROBLÊME.

463. *Deux lignes droites* AB, DE (*fig.* 124 125 & 126) *étant données de grandeur & de position pour deux diametres conjugués d'une ellipse, construire une machine par le moyen de laquelle on puisse décrire l'ellipse demandée d'un mouvement continu.*

SOLUTION.

Soient *AB*, *DE* les diametres donnés qui se coupent mutuellement en deux parties égales au centre *C*, sur lesquels il faut décrire une ellipse. Par le point *D* extrémité de l'un de ces diametres, on abaissera sur son conjugué *AB* la perpendiculaire *DF*, sur laquelle prolongée, s'il est nécessaire, de part & d'autre du point *D* à commençer du même point, on prendra une ligne *DG* égale à la moitié du diametre *AB*. Par le point *G* & le centre *C*, on menera une droite *CG* que l'on divisera en deux parties égales au point *O* duquel on menera au centre *C* & aux points *D*, *F* les lignes *OC*, *OF*, *OD*. Cela fait, on préparera d'une matiere solide, comme de laiton ou autre chose semblable ; 1° une regle *CO* percée de deux trous l'un en *C* & l'autre en *O* ; 2° un triangle *FOD* percé de trois trous à chacun de ses angles *D*, *O*, *F* que l'on arondira comme ils sont marqués dans la figure, pour une plus facile

éxécution de la machine. Le point *C* de la regle *CO* sera fixé à un point *C* d'une regle *IL* de quelle longueur on voudra, par le moyen d'une charniere, ensorte que cette même regle *CO* puisse tourner autour du point *C* comme centre; cette même regle sera aussi attachée par son extrémité O avec le sommet O du triangle *DOF* par le moyen d'une semblable charniere; au point *F* de ce triangle on mettra une petite pointe qui servira à faire mouvoir le point *F* de *C* vers *F*, ou de *F* vers *C*, de maniere qu'il soit toujours appliqué sur le côté *AB* de la regle *IL*, que l'on suppose elle-même dirigée suivant l'un des diametres *AB*. Si lon met un crayon au point *D*, il est visible par tout ce qui précéde, que le point *D* de la ligne *FG* décrira une ellipse sur les diametres donnés de position; car le point O est le rayon du cercle qui passe par les trois points *G*, *F*, *C* dans toutes les situations possibles de la droite *FG* entre les droites *CG*, *CB*.

COROLLIARE I.

464. Il suit de cétte solution que la ligne *FG* qui se meut entre le diametre *CB* & la ligne *CG*, est toujours égale à la somme ou à la différence de deux lignes, dont une est égale à la perpendiculaire abaissée d'un demi-diametre *CD* sur son conjugué, & la seconde est égale au demi-diametre sur lequel la premiere ligne a été abaissée. Dans la figure 125 la ligne *FG*

est égale à la somme de ces lignes & dans les figures 124 & 126, c'est la différence des mêmes lignes.

COROLLAIRE II.

465. Si les diametres donnés sont à angles droits, ou, ce qui est la même chose, si ce sont les axes mêmes de l'ellipse; la ligne *FG* sera égale à la somme ou à la différence des mêmes demi-axes. Le point *F* tombera au point *C* (*fig.* 127 & 128) & la ligne *CG* se trouvera sur le second axe *CD* prolongé de part & d'autre, du point *C*, s'il est nécessaire; & enfin le point *O* sera sur le milieu de la ligne *CG*, c'est-à-dire que l'on aura le rayon du cercle qui passe par les points *F*, *C*, *g* dans toutes les situations possibles de la ligne *Fg* en prenantla demi-somme ou la demi-différence des axes proposés; de plus, le centre de ce cercle se trouveroit toujours sur la ligne *Fg* à cause de l'angle droit; comme nous l'avons deja fait remarquer ailleurs.

On déduit encore des deux derniers corollaires, de nouvelles machines qui peuvent être très-utiles pour la description d'une ellipse dont on connoit les deux axes. Nous allons les expliquer dans les articles suivants.

Description d'uue nouveau Compas elliptique.

466. IL est une regle de cuivre, ou de quelqu'autre matiere bien polie (*fig.* 127 & 128)

à laquelle on a joint deux regles *CO*, *OF* de même matiere, unies ensembles par le moyen d'une charniere en *O*; la premiere peut tourner autour du point *C* de la regle *IL* à laquelle elle est unie, comme autour d'un centre de mouvement; la seconde est continuellement appliquée à la même regle *IL* par son extrémité *F*, qui peut parcourir les parties *CF*, *CA* de la ligne *AB*, jusqu'à ce que ces deux regles soient toutes entieres appliquées à la regle *IL*. Sur la regle *OF*, que nous appellerons la *mobile*, est un stile *S* qui doit servir à décrire l'ellipse, & que l'on peut placer de maniere qu'il soit mobile sur la même regle, afin que l'on puisse décrire plusieurs ellipses avec le même instrument. Il est aisé de reconnoître que l'on pourroit prendre le point *S* en *s*, sur le prolongement de la ligne *OF*. Dans le cas où le stile est placé en *S* (*fig.* 127) les demi-axes de l'ellipse décrite seront $CO+OS$ pour le grand, & *SF* pour le petit: & dans le cas où le point décrivant est placé en *s*, le demi-grand-axe est égal à *Fs*, & le demi-petit-axe est égal à $CO-Os$. Ainsi l'ellipse décrite par le point *S* sera *ADB*, & celle qui est décrite par le point *s* est la courbe *adb*.

SCHOLIE.

457. Il faut remarquer que des deux machines que nous venons d'expliquer pour construire des ellipses dont les axes sont donnés, celle qui est représentée par la fig. 128 est la plus facile à mettre en exécution, parce que la somme des lignes *CO*, *OF* étant moindre que celle des li-

gnes $CO+OS$, il n'est pas nécessaire de faire la regle CL plus longue que le double de CO: ainsi le point S pourra décrire l'ellipse toute entiere sans être arrêté dans son mouvement; au lieu que dans la figure 127 le point S ne peut décrire l'ellipse toute entiere, parce que les lignes $CO+OF$ étant plus longues que les lignes $CO+OS$, il doit nécessairement s'arrêter à la rencontre de la regle IL.

On déduit des deux machines que nous venons d'expliquer des descriptions nouvelles, & très-simples d'une elllipse dont les deux axes sont donnés; en cherchant nn grand nombre de points de cette courbe. Cette description peut être d'autant plus commode, que sans beaucoup de temps on pourra trouver un si grand nombre de points que l'on voudra.

468. *Soient* CA, CB *les deux demi-axes d'une ellipse qu'il faut décrire pat plusieurs points* (*fig.* 129 & 130).

Ayant décrit sur l'un des demi-axes, sur CA, par exemple, un quart de cercle AM qui coupe l'autre axe prolongé, s'il est nécessaire, au point E; par tant de points que l'on voudra du même axe CA, on élevera des ordonnées PM, PM, PM prolongées, indéfiniment (*fig.* 130) dans le cas où le cercle à été décrit sur le petit axe CA; ayant ensuite divisé la ligne BE différence des deux demi-axes en deux également au point D, & tiré du centre C aux extrémités des ordonnées PM les droites CM, CM, CM que l'on prolongera aussi indéfiniment (*dans*

la fig. 130) sur les lignes *CM* à partir du point *M* avec le rayon constant *BD*, on décrira des arcs de cerclé du centre *O* qui couperont les *PM* aux points *S*, *S*, *S* qui seront des points de l'ellipse demandée.

Démonstration.

Pour se convaincre que le point S est à l'ellipse, par le point O & le point *S* soit menée la ligne *OSF*, ou *SOF* (*fig.* 130) jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe *CA* prolongé s'il est nécessaire. Il est visible par cette construction, que le triangle *COF* est isocele, car dans le triangle rectangle *CPM* l'angle *C* = un droit — *CMP*, & au triangle rectangle *FSP*, l'angle en *F* = un droit — *FSP*, mais l'angle *FSP* = *CMP*, puisque cet angle est opposé au sommet de l'angle *OSM* du triangle isocele *MOS*; donc cette construction revient entierement à la machine désignée par la figure 127, puisque les lignes *CO*, *OF* sont égales, & que la ligne *OS* est égale à la moitié de la différence des demi-axes proposés.

Pour faire encore mieux sentir la vérité de tous les articles précédents qui ne sont que des suites immédiates de l'article 451, & pour convaincre ceux qui ne sonr pas accoutumés à se figurer tous les mouvements dont il s'agit ici; nous allons donner uue démonstration directe de cette construction.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Par un un des points *S* soit menée la droite *SR* parallele à l'axe *CA* (*fig.* 129 & 130) jusqu'à ce qu'elle rencontre le rayon *CM* qui passe par l'extrémité *M* de l'ordonnée *PM* sur laquelle on a déterminé le point *S*. Le triangle *OSR* sera isocele & semblable au triangle *COF*, puisque l'on a démontré ci-dessus l'égalité des angles en *C* & en *F*; donc $OR=OS=OM$; & partant $RM=BE$; cela posé, après avoir encore mené la droite *RK* parallele à *PM* & terminée à l'axe en *K*, on aura à cause des triangles semblables *CKR*, *CPM*;
$PM:KR$ ou $PS::CM:CR$ ou $::CA:CB$; donc le point *S* est à l'ellipse, puisque l'on démontrera de la même maniere que toutes les ordonnées *PS* sont aux ordonnées circulaires correspondantes dans le rapport de *CA* à *CB*. C. Q. F. D.

Si simple que soit cette description, elle deviendroit impratiquable, lorsque le rayon *BD* ou *MO* égal à la demi-différence des demi-axes sera très-petit, parce que dans ce cas il seroit difficile de déterminer les points de l'ellipse avec précision; c'est pourquoi, il est à propos d'avoir recours à une autre méthode, en se servant de la moitié de la somme des demi-axes donnés, ce qui fera un rayon toujours assez grand, pour décrire l'ellipse avec toute l'exactitude possible.

AUTRE DESCRIPTION.

469. Sur l'un des demi-axes *CA*, par exemple,

on décrira un quart de cercle *AME* qui rencontrera l'autre axe *CB* prolongé en *E* (*fig.* 131 & 132). Il est évident que la ligne *BE* est égale à la somme des demi-axes : on partagera cette ligne en deux également au point *D* ; ayant ensuite mené à l'axe *CA*, sur lequel on a décrit le quart de cercle des ordonnées *PM*, *PM*, *PM* prolongées indéfiniment au-dessus de *CA* (*fig.* 131) & au-dessous de la même ligne (*fig.* 132), & tiré par le centre *C* les lignes *CM*, *CM*, *CM* aussi prolongées s'il est nécessaire; sur chacune de ces lignes du point *O* comme centre avec un rayon *OM*=*BD*, on décrira des arcs de cercle qui couperont les ordonnées prolongées en *S*, & donneront sur chacune de ces lignes un point de l'ellipse demandée. Cette description suit entierrement des mêmes principes que la précédente, je laisse aux commencants le plaisir d'en trouver eux-mêmes la démonstration.

PROBLÈME.

470. *Deux diametres cojugués* AB, DE *étant donnés* (*fig.* 133) *décrire l'ellipse à laquelle ils appartiennent en se servant du cercle.*

SOLUTION.

On décrira sur l'un des diametres *AB* un demi-cercle *AFB*, & ayant joint les extrémités des deux demi-diametres *CA*, *CD* par la

ligne *AD*; par un point *P* quelconque du diametre *AB* on menera la droite *PM* perpendiculaire à ce diametre terminée à la circonférence en *M*, & la droite *PO* paralléle à la ligne *AD* terminée en *O* à la ligne *CD*. Par le point *O* ainsi déterminé, on prendra de part & d'autre sur une ligne *SOs* parallele à *AB* les parties *OS*, *Os* égales à l'ordonnée *PM*; ce qui donnera deux points *S*, *s* de l'ellipse demandée.

DÉMONSTRATION.

A cause des paralleles *AD*, *PO* les triangles *ACD*, *PCO* sont semblables & donnent $CA^2 : CP^2 :: CD^2 : CO^2$, donc *dividendo* $CA^2 - CP^2 : CA^2 :: CD^2 - CO^2 : CD^2$ & *alternando* $CA^2 - CP^2 : CD^2 - CO^2 :: CA^2 : CD^2$. Mais $CA^2 - CP^2 = AP \times PB = PM^2 = OS^2$, & par la même raison $CD^2 - CO^2 = EO \times OD$; donc $OS^2 : EO \times OD :: CA^2 : CD^2$, d'où il suit que ce point est à l'ellipse dont *AB*, *DE* sont les diametres conjugués. C. Q. *F*. D.

COROLLAIRE

471. Si les deux diametres conjugués sont égaux, les triangles *ACD* & *PCO* seront isosceles, & les lignes *CP*, *CO* seront égales; dans ce cas, pour avoir les points de l'ellipse, il suffira de mener par le point *P* une droite $PQ = PM$ & parallele au diametre *CD*. On trouveroit tous les autres points de la même maniere.

SOLUTION

du Problême proposé (num. 444) pour l'Hyperbole.

PROBLÊME I.

472. *Deux lignes droites* AB, DE *qui se coupent en deux parties égales au point* C *étant données de graedeur & de position pour deux diametres conjugués d'une hyperbole (fig. 134), la décrire par plusieurs points.*

SOLUTION.

A l'extrémité *A* de l'un des diametres conjugués, on menera une droite indéfinie *GA F* paralléle à l'autre *DE*, sur laquelle on prendra les parties *GA*, *AF* chacune égale à la ligne *DC*. Par le centre *C* & les points *A*, *F* on menera les droites *CF*, *CG* qui seront les asymptotes de l'hyperbole demandée, dont le point *A* est un de ses points.

Par le même point on menera une droite quelconque *HAK* terminée aux asymptotes, & l'on prendra *HI*=*AK*, ce qui nous donnera un nouveau point de l'hyperbole, par le moyen du quel on trouveroit encore tant d'autres points que l'on voudroit en tirant des droites *LIM*, *OIQ* sur lesquelles on prendra les droites *PQ*, *OI*; *MN*, *IL* égales entr'elles. On décrira de la même maniere l'hyperbole opposée à celle-ci & les conjuguées aux deux premieres si on en avoit besoin, toute cette description suit évidemment des propriétés des asymptotes dé-

montrées *art.* 290 & suivants. C. Q. F. T. & D.

Il est aisé de reconnoître qu'on pourroit se servir de la même méthode, si l'on avoit seulement les asymptotes données de position avec un point de la courbe ; car le point donné supplée à la connoissance des diametres de l'hyperbole & détermine les quatres hyperboles conjuguées, ensorte que dans le même angle des asymptotes, on ne peut pas décrire plusieurs hyperboles qui passent par le même point.

Probleme. II.

473. *Les mêmes choses étant données, décrire l'hyperbole par un mouvemeut continu* (fig. 135 & 136).

Solution.

Ayant déterminé l'angle des asymptotes, comme dans le problême précédent, on fera une fausse équerre dont l'angle *Pcf* soit égal à l'angle *GCF* des asymptotes, & dont la branche *cf* soit égale à la partie *CF* de la même asymptote comprise entre le centre *C* & une ligne *AF* menée de l'extrémité *A* du diametre *AB* parallelement à l'autre asymptore *CG*. Au point *f* on attachera une regle *Af* mobile autour de ce point, & d'une longueur indéfinie. Cela posé, si l'on imagine que cette fausse équerre toujours appliquée sur l'une des asymptotes *CFf*, se meuve de *c* vers *C* & que la regle qui lui est attachée passe toujours par le point fixe *A* auquel on aura fixé une pointe ou stilet pour maintenir la regle *Af*, l'intersection *P* de la regle & de l'équerre dans ce mouvement continu, décrira

l'hyperbole

l'hyperbole *CA* est le demi-diametre, & dont les lignes *CF*, *CG* sont les asymptotes.

DÉMONSTRATION.

Puisque l'angle *Pcf* de la fausse équerre est égal à l'angle *GCF* des asymptotes, il sera aussi égal à l'angle *AFc* formé par une des asymptotes *CF* & par une ligne *AF* parallele à l'autre *CG*; ainsi les triangles *AFf*, *Pcf* seront semblables & donneront $cf : cP :: fF : AF$; donc $cP \times fF = cf \times AF$. Mais $cf = CF$, *par construction*, donc $Ff = Cc$, en ôtant de *fF* la ligne *cf* & ajoûtant au reste son égale *CF*: donc $cP \times Cc = CF \times AF$, d'où il suit que le point *P* est à l'hyperbole, puisque le rectangle $cP \times Cc$ est égal à la puissance ou au rectangle $CF \times AF$ qui est toujours le même. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

474. Il est aisé de voir que la démonstration ne change pas, en supposant la branche *cP* de la fausse équerre entre la ligne *AF* & l'asymptote *CG* (*fig.* 136). On peut aussi par le moyen de la même figure se convaincre que le point *P* s'approche continuellement de la ligne *CG*, sans jamais pouvoir être sur cette ligne; car lorsque le point *f* sera sur le point *F*, le point *c* sera sur le point *C*, & alors la branche *cP* de la fausse équerre, sera parallele à la regle *fP*; Ainsi l'on ne pourra plus marquer de point *P* par l'intersection de ces deux regles.

475. Si par le point B extrémité du diametre AB, on mene la ligne BF terminée à l'asymptote CF & parallele à l'autre CG (*fig.* 137 & 138); on pourra construire une machine à peu près semblable à la précédente, en faisant la branche cf d'une nouvelle équerre égale à la ligne CF, & disposant la regle Bf mobile autour du point f & attachée à notre équerre, de maniere qu'elle soit toujours appliquée au point B, tandis que la ligne cf parcourera la ligne $FfCc$. Dans cette nouvelle construction, les triangles BFf, Pcf seront toujours semblables, & donneront Ff ou $Cc : FB :: fc$ ou $CF : cP$ ou CG, donc $CG \times Cc = FB \times CF$; d'où il suit évidemment que le point P est à l'hyperbole, puisque le rectangle $FB \times CF$ est la puissance de la même courbe.

PROBLEME III.

476. *Deux lignes droites égales* CA & CB (fig. 139) *étant données de position pour deux demi-diametres conjugués d'une hyperbole équilatére; décrire cette courbe par plusieurs points, sans avoir recours aux asymptotes.*

Solution.

Par tant de points O, O que l'on voudra du diametre BC prolongé autant qu'il sera nécessaire, on menera des lignes indéterminées OP, OP &c. toutes paralleles entr'elles & au diametre CA; au point C centre des hyperboles opposées, on élevera la droite CD indéfinie

& perpendiculaire au diametre CA, sur laquelle on prendra les parties Co, Co égales aux lignes CO, CO chacune à sa correspondante. De chaque point o au point A extrémité du diametre CA on menera les droites oA, oA : ensuite on prendra sur chaque OP parallele à CA une partie déterminée OP égale à la ligne oA, chacune toujours égale à sa correspondante. Tous les poinns P trouvés de la même maniere seront à l'hyperbole équilatére dont CA & CB sont les demi-diametres conjugués. Car à cause du triangle rectangle ACo on a évidemment $Ao^2 = CA^2 + Co^2$, ou, en mettant à la place des lignes Ao & Co leurs égales PO, CO, *par construction*, $PO^2 = CA^2 + CO^2$, qui est la propriété des ordonnées extérieures de l'hyperbole équilatére (*art.* 327). C. Q. F. D.

COROLLAIRE

477. Si les diametres donnés font angle droit, ou, ce qui revient au même, si on a l'axe d'une hyperbole équilatére, la construction précédente peut toujours avoir lieu & devient une des plus simples par la suppression des arcs de cercle Oo, Oo; puisque dans ce cas les ordonnées sont perpendiculaires à l'axe.

PROBLEME.

478. *L'axe & les foyers d'une hyperbole ou d'une ellipse étant donnés; construire une machine propre à décrire ces deux courbes d'un mouvement*

continu, en servant des propriétés des foyers (fig. 140 & 141).

SOLUTION POUR L'ELLIPSE.

Soit *Aa* l'axe de l'ellipse demandée dont *F*, *f* sont les foyers. On prendra trois regles *Df*, *BF* & *DB*, dont les deux premieres *Df*, *BF* seront chacune égale à la grandeur de l'axe *Aa*, & percée d'un bout à l'autre d'une reinure de même largeur dans l'une & dans l'autre : ces deux regles seront fixées par une de leurs extrémités aux foyers *F*, *f* par le moyen d'un stile autour du quel elles pourront tourner. Par l'autre extrémité elles seront pareillement fixées au moyen d'un stile semblable au précédent, avec la troisieme regle *BD* que l'on fera de la grandeur de la distance *Ff* des foyers. Il est aisé de voir que les trois regles ainsi disposées pourront avoir une infinité de situations différentes. Si l'on met au point *P* intersection des deux regles égales un stile qui passe dans la reinure qui a été pratiquée à cet effet; je dis que ce point *P* décrira l'ellipse demandée pendant le mouvement des regles autour des foyers.

Imaginons qu'elles ont actuellement la situation représentée par la figure, & que l'on ait tiré la ligne *DF*; les triangles *BDF*, *fFD* seront égaux en tout, puisque les trois côtés de l'un sont égaux aux trois côtés de l'autre; car, *par construction* $Df = BF$ & $BD = Ff$, de

plus ils ont une base commune *DF* : donc en ôtant le triangle commun *DPF*, puisqu'ils ont, outre la base commune les triangles *DPB*, *FPf* sont aussi égaux en tout ; ainsi l'on aura *FP*=*DP* : donc *FP*+*fP*=*Df* ou *Aa*, d'où il suit évidemment que la courbe décrite est une ellipse.

SOLUTION POUR L'HYPERBOLE.

479. Cette solution revient à peu près au même que la précédente. On prendra deux regles *fDP*, *BFP* chacune égales entr'elles & d'une longueur indéfinie. Sur l'une & l'autre on fera deux trous *f*, *D*; *B*, *F* chacun distant l'un de l'autre de la longueur de l'axe *Aa* ; le reste de la regle sera percé dans toute sa longueur d'une reinure de même largeur partout, dans laquelle on puisse faire glisser un stile *P* de même diametre. chacune de ces regles sera fixée aux foyers *F*, *f* par le moyen d'un clou autour du quel elle pourra tourner & elles seront assujeties l'une à l'autre par une troisiéme regle *BD* qui sera de la longueur de la ligne *Ff* distance des foyers de l'hyperbole, & qui leur sera jointe par des petites goupilles qui passeront par des trous pratiqués en *B* & en *D* sur chacunes. Si l'on imagine que l'on fasse mouvoir ces regles ainsi assemblées, le stile *P* placé, comme nous l'avons dit, dans l'intersection commune des reinures, décrira dans ce mouvement l'hyperbole demandée.

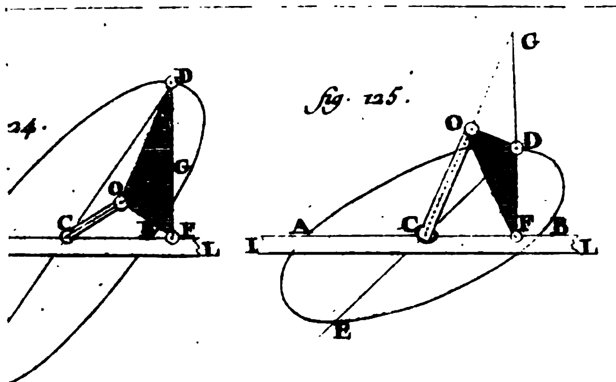
Pour s'en convaincre, soit tirée la ligne *FD* ; les triangles *BFD*, *fDF* seront égaux en tout, puisque, outre la base commune *DF*, ils ont

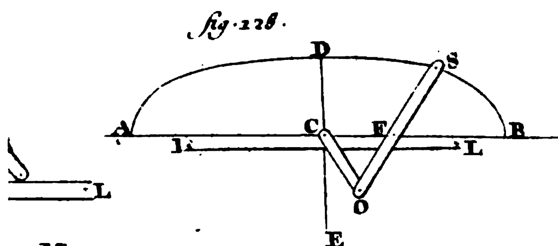
les côtés BF, BD égaux aux côtés fD, fF; donc le triangle DPF est isocele, & l'on aura $FP = PD$: donc $fP - Pf = FD$ ou Aa, ce qui montre évidemment que la courbe est une hyperbole, puisque cette propriété est la principale des foyers. C. Q. F. D.

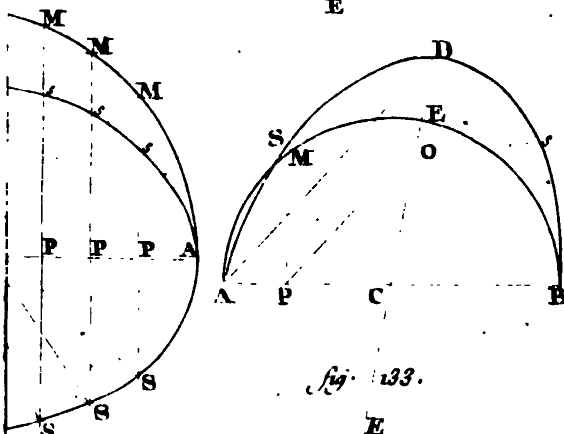
Il y auroit encore une infinité de choses curieuses à expliquer sur la description des Sections coniques, & qui ne pourroient manquer d'exercer beaucoup l'esprit de ceux qui voudroient s'y appliquer. Si l'on veut en voir d'avantage, on pourra recourir au grand traité des Sections coniques du P. GRÉGOIRE DE S. VINCENT. On y trouvera la solution d'un des plus beaux Problêmes que l'on puisse proposer sur les Sections coniques, & que l'on pourroit appeller la *Description réciproque* des Sections coniques, c'est-à-dire, l'art de de décrire une Section conique quelconque déterminée de grandeur, par le moyen d'une autre donnée aussi de grandeur & de position; comme si on proposoit de décrire une ellipse ou une hyperbole, par le moyen d'une parabole donnée, & réciproquement.

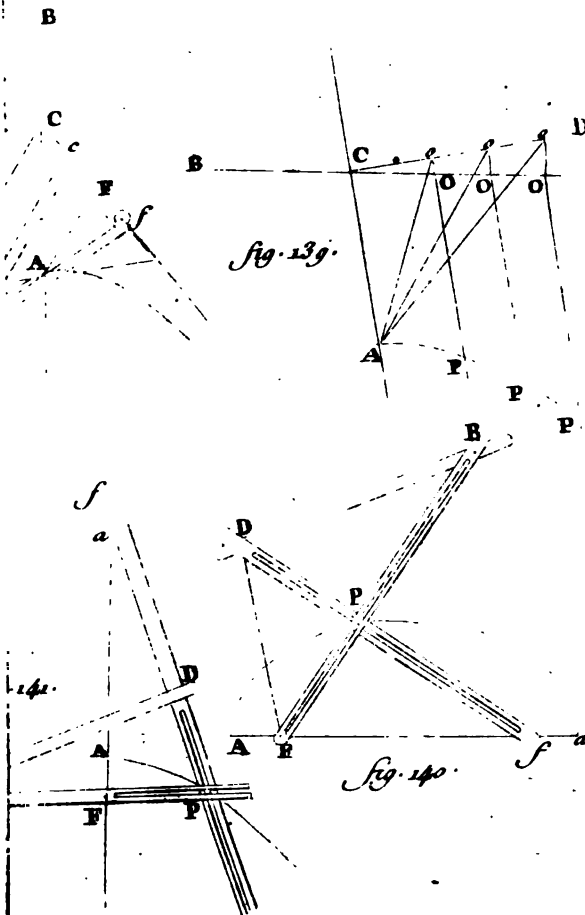
Ceux qui auront bien compris ce qui précede & qui joindront à cela une connoissance suffisante de l'application de l'algebre à la géométrie, pourront aisément trouver les solutions analytiques de ce problême.

Fin du quatriéme Livre & de la Description des Sections coniques.


24.
D
G
O
C
F
L
fig. 125.
G
O
D
A
C
F
B
L
L
E


fig. 128.
D
S
A
C
F
B
L
L
O
E
L


M
M
M
P
P
P
A
S
S
S
132
D
E
S
M
O
A
P
C
B
fig. 133.
E


B
C
c
F
f
A
B
C
e
e
e
D
O
O
O
fig. 139.
A
P
P
P
B
f
a
D
P
D
141.
A
A
F
f
a
fig. 140.
F
P



AVERTISSEMENT.



E qui suit n'est, pour ainsi dire, qu'une traduction littérale du quatrieme livre des Sections coniques du P. Deschalles. *Je ne crois pas que l'on ait, en fait d'éléments synthétiques, quelque chose de plus clair que ce qui a été fait sur cette matiere par ce sçavant Géometre. Il a débrouillé dans cet ouvrage le cahos des coniques d'Appollonius, & renfermé dans un petit nombre de propositions sur chaque courbe, ce qu'il est absolument nécessaire de sçavoir dans cette partie, lorsqu'on ne veut pas aller plus loin. On sera peut-être surpris que j'emploie, ou plutôt que l'autheur que j'ai traduit, ait établi sept ou huit théorêmes pour démontrer des propositions qui se trouvent démontrées dans d'autres livres par un seul; mais je prie les lecteurs de faire attention, qu'en fait de Géométrie, lorsqu'on suppose quelque chose qui a besoin d'être prouvé, la démonstration la plus abrégée par cette méthode est la moins complette; j'ai substitué dans cette traduction, comme dans tout ce que l'on a vu jusqu'ici, les signes + & — à des expressions verbales, afin d'augmenter la précision du tableau géométrique; & par-là je diminue sou-*

vent la longueur des démonstrations, en évitant de répéter deux fois la même proportion, & disposant les rapports dont elles sont composées de maniere qu'on puisse toujours conclure du premier au dernier, ce qui ne se trouve pas si commodément dans le texte latin.

J'ai inséré, dans les endroits où j'ai cru convenable, des propositions intéressantes & qui peuvent être nécessaires pour la solution des problêmes qu'on pourroit proposer sur cette matiere; comme ceux qui auroient pour objet de couper une section conique déterminée dans un cône donné. Je donne ensuite un traité de la solidité des corps dont les éléments croissent dans la raison des quarrés des ordonnées à un diametre d'une section conique. Je démontre comment il faut s'y prendre pour toiser les segments & les secteurs de ces mêmes corps. Quoique je ne veuille point blâmer la méthode dont tous les autres autheurs se sont servi pour démontrer la solidité de l'ellipsoide; je crois que l'on pourra trouver quelque chose de nouveau dans la mienne, en ce qu'elle ne suppose point comme les autres la cubature de la sphére qui est elle-même une espéce particuliere d'ellipsoide, & qu'au contraire la solidité de la sphere & de toutes ses parties je conclud immédiatement de celle que je donne pour l'ellipsoide: elle a encore cet avantage qu'elle fait voir de quelle maniere l'ellipse & l'hyperbole affectent les mêmes propriétés jusque dans les solides qui tirent leur génération de ces courbes. Après avoir donné la démonstration synthétique de la principale proposition,

AVERTISSEMENT.

Je donne les opérations par algebre, pour avoir des formules plus générales & pour diminuer la longueur des démonstrations. Enfin j'ai terminé par examiner les courbes que l'on peut couper dans des cônoides quelconques formés par des cercles faits sur les ordonnées d'une section conique quelconque. Cette recherche me conduit encore de nouveau aux courbes qui sont asymptotes les unes par rapport aux autres: cette propriété qui n'avoit été conclue que par induction pour la parabole, se trouve démontrée dans toute la rigueur géométrique. En un mot, je démontre dans cette derniere partie que dans un conoide quelconque de quelque maniere qu'on puisse le couper, les courbes qui en resulteront seront toujours de simples Sections coniques; & que toutes les courbes coupées dans chacun de ces solides par différents plans paralleles seront des courbes semblables, & asymptotes les unes à l'égard des autres dans le paraboloide & l'hyperboloide seulement, dans le cas où le plan coupant est parallele au diametre du conoide.





DES SECTIONS CONIQUES

CONSIDERE'ES DANS LE CONE

LIVRE CINQUIEME.

480. NOus allons présentement considerer dans le solide les courbes qui ont été l'objet des trois premiers livres, & faire voir que ces courbes sont précisément celles qui résultent des différentes sections d'un cône, ce qui les a fait appeller en général *Sections coniques*.

DÉFINITIONS.

I.

481. Si l'on imagine un cercle *AGBA* (*fig.* 142) dont le centre est *C*, un point *S* placé au dehors du plan de ce cercle, & une ligne droite *AS*, qui parcoure par son extrémité *A* la circonférence du cercle *ACB*; tandis que son autre extrémité *S* est fixément attachée au point S; la surface engendrée par ce mouvement sera appellée *Surface conique*. Si on

suppose la ligne *AS* prolongée en *E*, elle décrira aussi une surface conique qui sera semblable à la premiere. Les deux ensembles sont appellées *surfaces coniques opposées.*

II.

482. Le solide renfermé par la surface conique & le cercle *AGBA*, est appellée *Cône.*

III.

483. Le point *S* placé comme nous l'avons dit, est le *Sommet* du même cône.

IV.

484. Une ligne droite menée du sommet *S* au centre *C* du cercle *AGBA*, est appellée *L'axe* du cône.

V.

485. Le cercle *AGBA* est appellé *Base* du cône.

VI.

486. Si l'axe *CS* est perpendiculaire au plan du cercle qui sert de base, le cône sera appellé *Cône droit.*

VII.

487. Si le même axe est oblique au plan de la base, le cône sera nommé *Scaléne.*

488. N. B. *On supposera dans ce qui suit, que les cônes dont nous parlerons sont des cônes scalénes ou obliques, afin de rendre les démonstrations plus générales.*

PROPOSITION L.

Théorême.

489. *Une ligne droite* SF (*fig.* 143) *menée par le sommet du cône & par un point quelconque de la surface conique, est toute entiere dans cette surface.*

Démonstration.

Puisque la ligne *AS* passe toujours par le sommet *S*, en décrivant la surface conique, elle aura nécessairement deux points communs avec la ligne *SF*; donc elle se confondra avec elle; donc la ligne *SF* est toute entiere dans la surface conique. C. Q. F. D.

Corollaire I.

490. Donc si l'on prolonge la ligne *SF* d'une grandeur indéfinie; elle rencontrera nécessairement le cercle *AGB* dans un point *G* de sa circonférence, puisque tous les points de cette circonférence, sont à la surface conique.

Corollaire II.

491. Donc si par le sommet *S* on mene une ligne au-de-dans ou au-de-hors de la surface conique, elle sera toute entiere au-de-dans ou au-dehors de la mêmesurface, & ne pourra plus la rencontrer en aucun point; quand elle seroit prolongée à l'infini.

PROPOSITION II.

THÉOREME.

492. *Si l'on coupe un cône* ASB *par un plan qui passe par le sommet* S; *la section sera un triangle.* (*fig.* 143)

DÉMONSTRATION.

Que la section de la base du du cône par le plan coupant, soit representée par *AG* qui sera une ligne droite. Par les points *A*, *G* je mene au sommet *S* les droites *AS*, *GS* qui seront des lignes droites (*art.* 481) renfermées dans le plan coupant; d'où il suit évidemment que la section est un triangle. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

493. Donc si le plan coupant passe par l'axe du cône, la section sera encore un triangle; puisque l'axe passe nécessairement par le sommet *S* du cône. (*art.* 484)

PROPOSITION III.

THÉOREME.

494. *Si une ligne droite* FD *joint deux points quelconques* D, F *de la surface conique, je dis qu'elle est toute entiere au-de-dans du cône, & qu'étant prolongée elle passera au-de-hors.*

DÉMONSTRATION.

Par le sommet *S* & les points *F*, *D* soient menées les lignes *SD*, *SF* que l'on prolongera jusqu'à la circonférence du cercle qui est la base

du cône ; il est évident que la ligne *AG* sera au-de-dans du cercle, & que la section *GSA* sera un triangle ; cela posé, puisque les côtés du triangle sont renfermés sur la surface conique, le triangle sera au-de-dans du cône & partant la ligne *DF* sera aussi au-de-dans du même cône. C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

Théorême.

495. *Si l'on mene parallelement à la base du triangle par l'axe des lignes droites comme* DI ; *je dis qu'elles seront coupées en deux également par l'axe, & qu'elles seront entr'elles comme leurs distances au sommet* S *du cône.*

Démonstration.

Que le triangle *ASB* soit la commune section du cône & du plan qui passe par l'axe, sur laquelle se trouve la ligne *DI* coupée par le même axe au point *L*. Puisque cette ligne est parallele à la ligne *AB*, les triangles *ACS*, *DLS*, *BCS*, *ILS* seront semblables & donneront $CS : LS :: AC : DL$ & $CS : LS :: BC : LI$ donc $AC : DL :: BC : LI$ & partant $DL = LI$, puisque $BC = AC$. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

Théorême.

496. *Si l'on coupe un cône par un plan parallele à sa base, la section sera un cercle, dont le centre se trouvera sur l'axe du même cône.*

DÉMONSTRATION.

Soit le cône *ASB* (*fig.* 144) coupé par le plan *DKE* parallele à sa base; je dis que la figure *DKED* qui résulte de cette section, est un cercle dont le centre est en *F* sur l'axe *CS*.

Pour le prouver, imaginons que le cône est encore coupé par un plan quelconque *CGS*, qui passe par l'axe. Les droites *CG*, *FK* dans lesquelles ce plan coupe les plans paralleles *AGB*, *DKE* seront paralleles entr'elles ainsi que les lignes *DE*, *AB* qui représentent les sections des mêmes plans paralleles par le triangle *ASB*. Donc les triangles *ACS*, *DFS*; *GCS*, *KFS* seront semblables & donneront $AC : DF :: CS : FS$ & $CS : FS :: CG : FK$, donc $AC : DF :: CG : FK$; mais puisque la base est un cercle dont le point *C* est le centre, $AC = CG$; donc $DF = FK$; d'ou il suit clairement que la section *DKE* est un cercle qui a pour centre le point *F* de l'axe, puisque toutes les lignes menées de ce point à la circonférence sont égales entr'elles. C. Q. F. D.

LEMME.

497. *Si dans une figure curviligne* AEDB (*fig.* 145) *les perpendiculaires* EG, DF *à une droite* AB *menée au-de-dans de cette figure, sont telles que leurs quarrés soient égaux aux rectangles* AG × GB *ou* AF × FB *des parties de cette ligne; la figure sera un cercle.*

Soit divisée la ligne *AB* en deux également en *C* & soient menées de ce point les lignes *CD*, *CE* aux extrémités des perpendiculaires *DF*, *EG*; à cause du triangle rectangle *CDF* on a $DF^2 = CD^2 - CF^2$; & *par hypothese* $DF^2 = AF \times FB$ ou *par le Lemme fondamental* $CB^2 - CF^2$: donc $CD^2 - CF^2 = CB^2 - CF^2$; d'où il suit que $CD = CB$; & partant la figure est un cercle. C. Q. F. D.

498. *N. B.* Comme on parle souvent du triangle par l'axe; pour une plus grande précision, il est bon de connoître les positions que ce triangle peut avoir à l'égard de la base du cône dans un cône oblique. On remarquera donc que de tous les triangles par l'axe que l'on peut mener dans un cône scaléne, qui sont en aussi grand nombre qu'il y a de points dans la demi-circonférence de la base de ce cône, il n'y en a qu'un seul qui puisse faire angle droit avec cette base. Pour le déterminer, voici ce qu'il faut faire. Du sommet *S* du cône (*fig.* 143) on abaissera une perpendiculaire *SK* sur la base *AGB*, par le centre *C* & le point *K* on menera le rayon *CKB*, il est évident que le triangle *CKS* sera perpendiculaire à la base *AGB*, à cause de la perpendiculaire *SK*; donc le triangle *ASB* qui n'est que le prolongement de celui-ci, sera aussi perpendiculaire à la même base, & de plus il sera le seul triangle par l'axe qui puisse avoir cette propriété, parce que d'un point *S* on ne peut

abaisser

abaisser qu'une seule perpendiculaire à un plan & que par deux lignes *SK*, *SL* on ne peut faire passer qu'un seul plan.

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

499. *Si l'on coupe un cône scalene* ASB (*fig.* 146) *par un plan* DHE *perpendiculaire au plan du triangle par l'axe* ASB, *que l'on suppose aussi perpendiculaire à la base de ce cône, de maniere que la ligne* DE *commune section du triangle par l'axe & du plan* DEH *qui lui est perpendiculaire, fasse avec le côté* SB *un angle* DES *égal à l'angle* SAB; *la section qui en résultera sera un cercle.*

DEMONSTRATION.

Par un point *H* de la surface conique & du plan *DHE*, j'imagine une droite *HI* perpendiculaire à la ligne *DE* : il est visible que cette ligne sera renfermée toute entiere au-de-dans du plan coupant *DHE*. Par cette ligne *HI* je fais passer un plan *GHF* qui coupe le triangle par l'axe dans une ligne *FIG* parallele à la base *AB* du même triangle ; la nouvelle section sera un cercle, comme on l'a démontré, puisque le plan *FHG* est parallele à la base; l'une & l'autre étant perpendiculaires au triangle par l'axe. Cela posé, à cause du cercle *GHF*, on aura $HI^2 = FI \times IG$; reste à faire voir que l'on aura aussi $HI^2 = DI \times IE$. Les triangles *ASB*, *ESD* sont semblables, puisqu'ils ont, outre l'angle commun en S, l'angle *A* & l'angle *E* égaux (*par construction*). Les triangles *DIF*, *GIE* seront

aussi semblables par la même raison, puisque l'angle *GEI* de l'un est égal à l'angle *DFI* de l'autre, à cause des paralleles *AB*, *FG*, & que les angles en *I* sont opposés au sommet : donc on aura la proportion $DI : IF :: IG : IE$, d'où l'on tire $DI \times IE = IF \times IG = HI^2$. C. Q. F. D.

DÉFINITION.

500. La section *DEH* est appellée *sou-contraire*, & l'on dit dans ce cas que le cône *ASB* est coupé par le plan *DHE* *sou-contrairement.*

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

501. *Toute ligne comme* FH *menée d'un point* F *de la surface conique à un autre point* H *de la même surface, parallelement à une ligne* DE *perpendiculaire à la base du triangle par l'axe, rencontre le plan de ce triangle, & est coupée en deux également par le plan du même triangle.* (*fig.* 147).

DÉMONSTRATION.

Par le point *F* de la surface conique & le sommet *S*, soit menée la ligne *SF*, qui rencontrera la circonférence de la base dans un point *I* (*art.* 490) du quel on menera la droite *IKL* perpendiculaire à la base *AB* du triangle *ASB*, & par conséquent parallele aux lignes *FG*, *DE*; enfin par le sommet *S* & les points *K*, *L* soient encore menées les lignes *SK*, *SL*. Cela posé; puisque la ligne *IKL* rencontre le plan du triangle par l'axe dans

un point *K* de la ligne *SK* ; sa parallele *FGH* rencontrera nécessairement la même ligne *SK* dans un point *G* ; & comme cette ligne *SK* est la commune section du triangle par l'axe *ASB* & du triangle *ISL*, il s'en suit que la droite *FGH* rencontre le même plan dans un point *G*. 2°. Elle est coupée en deux également par la même ligne *SK*, ou par le plan du triangle par l'axe ; car, puisque les lignes *IKL*, *FGH* sont paralleles, les triangles *IKS*, *FGS* ; *LKS*, *HGS* seront semblables & donneront $IK:FG::KS:GS$ & $KS:GS::KL:GH$; donc $IK:FG::KL:GH$; mais $IK=KL$, puisque la ligne *IKL* est une double ordonnée au diametre *AB* ; donc aussi $FG=GH$. On démontrera la même chose de toute autre ligne prise à volonté & parallele à *DE*. Donc le triangle par l'axe coupe toutes ces lignes en deux parties égales. C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

502. *Supposant toujours le triangle par l'axe* ASB (*fig.* 148) *qui coupe un cône quelconque* ADBS ; *si on coupe le même cône par un autre plan* DEF, *de maniere que la commune section* DGF *de ce plan avec la base du cône soit perpendiculaire à la base* AB *du triangle par l'axe ; la section* EG *du triangle avec ce nouveau plan, coupera en deux parties égales toutes les lignes comme* HK *paralleles à la section* DF *de la base par ce même plan* DEF.

DEMONSTRATION.

Par la proposition précédente, la ligne *HIK* parallele à une ligne *DF* perpendiculaire à la base du triangle par l'axe rencontre ce même triangle, & par conséquent se trouve divisée en deux également : mais cette ligne étant prise dans le plan *DEF* ne peut rencontrer le triangle, que dans la commune section *EG*; & comme on démontrera la même chose de toute autre ligne prise dans le même plan; il s'en suit que toute ligne parallele à la perpendiculaire *FD* & comprise dans le même plan sera divisée en deux également par la commune section du triangle par l'axe & du plan *DEF*; pourvû que cette ligne soit terminée de part & d'autre à la surface conique. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

503. Si le triangle par l'axe fait angle droit avec le plan de la base du cône, la ligne *DG* prise sur cette base est perpendiculaire au plan du triangle par l'axe, & partant la ligne *HI* parallele à la premiere sera aussi perpendiculaire au même triangle; donc elle sera perpendiculaire à la commune section *EIG* du triangle par l'axe & du plan *DEF* dans lequel elle se trouve. Ce-ci ne peut arriver que dans un seul cas, lorsque le cône est oblique (*art.* 498); au lieu que cela arrivera toujours dans un cône droit, parce que tout triangle par l'axe est perpendiculaire à la base de ce cône. On verra dans la suite l'avan-

tage qu'il y a de prendre un cône oblique, préférablement au cône droit, & de prendre encore dans celui-ci un triangle par l'axe quelconque oblique à la base, afin que les propriétés des sections coniques se trouvent démontrées tout d'un coup par rapport à un diametre quelconque.

Il faut aussi bien remarquer que cette proposition est encore vraye, si le plan *DEF* se trouvoit disposé de maniére qu'il coupât le plan de la base sur son prolongement & au-de-hors du cône.

DÉFINITION.

504. La ligne *EG* qui divise en deux également toutes les lignes paralleles à *DF* & renfermées dans le plan *DEF* est appellée *diametre* de la section conique formée par le même plan.

PROPOSITION IX.

THÉOREME.

505. *Si le diametre* EG *d'une section quelconque (fig. 149) est placé de maniére qu'il ne puisse couper l'autre côté du cône entre le sommet* S *& la base* AB *du triangle par l'axe; la section* DEF *pourra être prolongée à l'infini.*

DÉMONSTRATION.

On suppose ici, comme dans toute la suite du livre, que la section conique a les deux conditions suivantes; 1°. Que le cône est coupé

par l'axe, quelque soit l'angle du triangle par l'axe avec la base; 2°. Qu'il est encore coupé par un autre plan dont la ligne de commune section avec la base du cône est perpendiculaire à la base du même triangle par l'axe; en outre, dans le présent théorême, je veux que le diametre *EG* de la section *DEF* soit disposé de maniére, qu'il ne puisse rencontrer l'autre côté *SB* au-dessous du sommet; mais qu'il lui soit parallele, ou qu'il fasse avec le côté *SA* un angle *AEG* plus petit que l'angle *ASB*. Cela posé, il est aisé de démontrer que dans ces deux derniers cas, la section peut être prolongée à l'infini. Imaginons que l'on ait prolongé la ligne *EG* si loin qu'on voudra, & qu'en même temps le cône & le plan coupant s'allongent à l'infini: par un point quelconque *I* de la ligne *EG* soit menée la droite *HIK* parallele à *DF*, & *MIL* parallele à *AB*: il est évident que le plan qui passera par ces deux lignes sera parallele à la base *ADB* du cône, & sera par conséquent un cercle. Donc les points *H*, *K* seront en même temps dans la surface conique & dans le plan *EFD*; d'où il suit que la section pourra être prolongée aussi loin qu'on voudra. C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

Théoreme.

506. *Supposant toutes choses comme dans la proposition précédente, avec cette différence que le plan*

du triangle par l'axe est perpendiculaire à la base du cône & que le diametre DE (*fig.* 150) *de la section coupe les deux côtés du cône, sans être parallele à la base, ou posé soucontrairement; je dis que la section ne peut pas être un cercle.*

DÉMONSTRATION.

Par un point quelconque I du diametre de la section, je fais passer une droite FIG parallele à la base AB du triangle par l'axe; par cette ligne je fais passer un plan parallele à la base du cône, dont la commune section avec le même cône sera un cercle, (*art.* 496); & dont la ligne de commune section avec le premier plan coupant, sera la ligne HIK perpendiculaire à la droite FIG. Si la courbe $DHEK$ étoit un cercle, on auroit $HI^2=DI\times IE$; & parce que la section $FKGH$ est un cercle, on a $HI^2=FI\times IG$; donc on auroit $DI\times IE=FI\times IG$, d'où l'on tire cette proportion $DI:IG::FI:IE$; ainsi les triangles DIF, GIE seroient semblables & partant à cause de l'angle en E qui seroit égal à l'angle en F, dans le cas présent la section seroit sou-contraire; ce qui est contre l'hypothese. Donc la section ne peut pas être un cercle. C. Q. F. D.

Il faut bien remarquer que dans cette proposition on suppose que le triangle par l'axe fait angle droit avec le plan de la base du cône. Car dans tout autre cas lors même que la section

feroit fou-contraire, la courbe ne feroit pas un cercle, parce que les ordonnées ne feroient pas angle droit avec la bafe.

PROPOSITION XI.

Théorème.

507. *Si le diametre* EG *de la fection (fig. 151) eft parallele au côté* SB *du cône, la courbe* DEF *fera une parabole.*

Démonstration.

On fuppofe toujours que le cône *ASB* eft coupé par l'axe, quelque foit l'angle que fait le plan *ASB* avec celui de la bafe. On fuppofe encore qu'il eft coupé par un autre plan *DEF* tel que la commune fection *DGF* de ce fecond plan avec la bafe foit perpendiculaire à la bafe du triangle par l'axe, & que le diametre *EG* foit parallele au côté *SB* du cône, ou pour mieux dire, du triangle par l'axe. Cela pofé, par un point *K* quelconque du diametre de la fection, je mene une ligne *NKO* parallele à la bafe *AB*, & une ligne *IKL* parallele à la ligne *DEF*. Puifque les lignes *AB*, *DF* font toutes deux dans la bafe, le plan *NIOL* qui paffera par leurs paralleles *NO*, *IL* fera parallele à la bafe; & par conféquent un cercle dont la ligne *IK* eft une ordonnée: donc $IK^2 = NK \times KO$; & de même $DG^2 = AG \times GB$; d'où l'on tire cette proportion $IK^2 : DG^2 :: NK \times KO : AG \times GB$; mais à caufe des

paralleles SB, GE, les droites KO, GB font égales, puifqu'elles font paralleles; *conftruction* : donc, en divifant le dernier rapport par ces mêmes lignes, $IK^2 : DG^2 :: NK : AG$ & à caufe des triangles femblables ENK, EAG; $NK:AG :: EK:EG$, donc $IK^2:DG^2 :: EK:EG$; d'où il fuit évidemment que la fection eft une parabole, puifque dans cette courbe les quarrés des ordonnées, font comme les abfciffes correfpondantes. C. Q. F. D.

Corolliare I.

508. Donc cette courbe a toutes les propriétés que nous avons démontré en la confidérant hors du cône, & décrite fur un plan.

Corollaire II.

509. Si l'on fait cette proportion $EK : IK :: IK.PM$, cette 3eme. proportionelle fera le parametre la courbe, car de cette proportion on tire $IK^2 = EK \times PM$. Je dis de plus que le quarré de toute autre ordonnée DG fera égal au rectangle de fon abfciffe par le même parametre. Car, *par la précédente propofition*, $IK^2:DG^2 :: EK:EG :: EK \times PM:EG \times PM$. Mais $IK^2 = EK \times PM$: donc $DG^2 = EG \times PM$.

PROPOSITION XII.

Theoreme.

510. *Dans la parabole, le parametre* PM *eft*

faſſe paſſer une ligne *FS*; je dis que cette ligne paſſera par les foyers de toutes les paraboles paralleles à la premiere: car on a vû dans le premier livre, que tout foyer de parabole eſt éloigné du ſommet de cette courbe, du quart du parametre de l'axe de la même courbe; donc ſi les points *F*, *f* ſont les foyers des paraboles repréſentées par ces ſections; ils ſeront déſignés par $\frac{1}{4} P$ & $\frac{1}{4} p$, en ſuppoſant que les parametres entiers ſont *P* & *p*; & comme, *par le corollaire précédent*, les parametres ſont proportionels aux lignes *ES*, *HS*; on aura $EF : Hf :: ES : HS$; mais à cauſe des triangles ſemblables *SEF*, *SHf* on aura auſſi la même proportion, d'où il ſuit évidemment que le point *f* eſt le foyer de la parabole *GHI*.

Corollaire IV.

514. On peut encore énoncer le dernier corollaire d'une maniére plus générale, comme il ſuit: ſi par le ſommet *S* d'un cône quelconque & un point quelconque d'une parabole coupée dans ce cône, on fait paſſer une ligne droite; cette ligne paſſera par tous les points ſemblablement placés dans toutes les paraboles imaginables, paralleles à la premiere; & réciproquement, ſi une ligne quelconque paſſe par deux points ſemblablement placés de deux paraboles différentes paralleles entr'elles, elle paſſera néceſſairement par le ſommet du cône dans lequel elles ont été coupées.

COROLLAIRE V.

515. Il suit de-là que l'on pourra toujours couper aisément dans un cône une parabole dont le parametre de l'axe soit donné, de quelqu'espece que soit le cône proposé, droit ou oblique. Il faudra commencer par trouver le triangle par l'axe dont le plan soit perpendiculaire à celui de la base du cône; ensuite on fera cette proportion $AS \times SB : AB^2 :: P$ est à un quatrieme terme, qui sera la distance du sommet du cône au sommet de la parabole demandée & déterminée sur le triangle par l'axe que l'on a supposé perpendiculaire au plan de la base.

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

516. *Si le diametre de la section (fig. 153) coupe les deux côtés du triangle par l'axe entre le sommet & la base du même triangle, la courbe sera une ellipse; pourvû que le triangle* ASB *ne soit pas semblable au triangle* ESD *; seulement dans le cas où le plan du triangle par l'axe est perpendiculaire au plan de la base du cône.*

DÉMONSTRATION.

Par deux points quelconques *G*, *K* de la section, on menera des lignes *PGO*, *MKN* paralleles à la baze du triangle par l'axe, & par ces lignes on imaginera des plans *OFP*, *MIN*

paralleles au plan de la base, qui seront par conséquent des cercles (*art.* 496), dans lesquels on tirera les droites FG, IK perpendiculaires aux lignes OP, MN, & par conséquent ordonnées à ces mêmes diametres. Cela posé, par la propriété des cercles, on a $FG^2 = OG \times GP$ & $IK^2 = MK \times KN$, & à cause des triangles semblables DGO, DKM, EGP, EKN; on aura pour les deux premiers

$$DG : DK :: OG : MK,$$

& pour les seconds $EG : EK :: GP : KN$, donc en multipliant par ordre $DG \times EG : DK \times EK :: OG \times GP : MK \times KN$; à cause des cerc. OFP, MIN, $OG \times GP :: MK \times KN : FG^2 : IG^2$ donc on aura *inverten.* $FG^2 : IK^2 :: DG \times EG : DK \times EK$. D'où il suit que la courbe est une ellipse, puisque les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme rectangles de leurs abscisses. C. Q. F. D.

REMARQUE.

517. Si la section étoit sou-contraire, les les triangles DGO, EGP seroient semblables, & par conséquent les rectangles $DG \times GE$ & $OG \times GP$ seroient égaux; donc le quarré de l'ordonnée FG seroit égal au rectaugle de $OG \times GP$; & partant la courbe sera un cercle; si la même ordonnée fait angle droit avec son dia metre, ce qui ne peut arriver que dans le cas où le triangle par l'axe est perpendiculaire au plan de la base comme nous en avons dêja averti. Ainsi dans le cône droit toute section sou-contraire donnera des cercles, parce que tous les

triangles par l'axe sont perpenculaires à la base; & dans les cônes scalenes, il n'y aura qu'un seul cas où cela passe puisse arriver, parce que nous avons démontré qu'il ne peut y avoir qu'un triangle par l'axe perpendiculaire à la base. Dans les autres triangles, les sections sou-contraires donneront des ellipses dont les diametres conjugués seront égaux.

PROPOSITION XIV.

Théorême.

518. *Une ligne* RS (*fig.* 153) *parallele aux ordonnées qui divise le diametre* DE *en deux également, est le diametre conjugué au premier, & de plus les ordonnées* FG, IK *également éloignées du diametre* RS *sont égales entr'elles.*

Démonstration.

La ligne *RS* étant parallele aux ordonnées, sera elle-même une ordonnée; & comme, *par la proposition précédente*, les quarrés de ces lignes sont entr'eux comme les rectangles de leurs abscisses, le rectangle *DS* par *ES* sera le plus grand de tous: puisque, par hypothese, le diametre *DE* est coupé en deux également au point *S*; donc aussi la ligne *RS* sera la plus grande ordonnée, & partant le diametre conjugué au premier. C. Q. F. D.

2°. Les ordonnées également éloignées du point *S* sont égales, puisqu'elles sont comme les rectangles $DK \times KE$, $DG \times GE$ qui sont égaux. C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE

519. Il suit de-là que l'ellipse qu'on coupe dans le cône est précisément celle que nous avons examiné sur un plan dans le second livre, & l'on voit par-là que cette courbe est une courbe symétrique, contre l'idée de certaines personnes qui s'imaginent qu'elle doit être plus arrondie vers le bas du cône que vers le sommet, parce que le cône va toujours en s'élargissant de haut en bas.

PROPOSITION XV.

THÉOREME.

520. *Si l'on mene par le sommet* S *d'un cône* ASB *une ligne* SK (*fig.* 154) *parallele au diametre de la section* DLE, *jusqu'à ce qu'elle rencontre la base du triangle par l'axe prolongée autant qu'il sera nécessaire en* K, *& qu'on fasse cette analogie* $SK^2 : AK \times KB :: DE : EH$; *ce quatrième terme sera le parametre du diametre* DE.

DÉMONSTRATION.

Puisque la courbe est une ellipse, on aura, en supposant PM ordonnée au diametre DE & LCI conjugué au même diametre, $EM \times MD : PM^2 :: DE^2 : LI^2$, & parce que la ligne EH est supposée le parametre du diametre DE, on aura $DE^2 : LI^2 :: DE : EH$. Donc $EM \times MD : PM^2 :: DE : EH$. Ainsi pour démontrer que la ligne EH déterminée comme on le suppose, est réellement le parametre du

diametre

diametre DE, il suffira de faire voir que $SK^2 : AK \times KB :: EM \times MD : PM^2$. Cela posé; à cause des triangles semblables ASK, EMN, qui sont formés avec un des côtés du triangle par l'axe & des lignes paralleles à la base du même triangle, on aura $SK : AK :: EM : MN$; & à cause des triangles semblables SKB, DMO, on aura pareillement $SK : KB :: DM : MO$; donc en multipliant ces deux proportions termes par termes, il viendra $SK^2 : AK \times KB :: EM \times DM : MN \times MO$, mais $MN \times MO = PM^2$, ainsi en substituant, il viendra $SK^2 : AK \times KB :: EM \times DM : PM^2$. D'où il suit évidemment que la ligne EH déterminée par cette proportion est le parametre du diametre DE. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

521. Puisque $SK^2 : AK \times KB :: DE : EH$, il suit de-là que l'on aura aussi $SK^2 : AK \times KB :: DE^2 : LI^2$ c'est à-dire que le quarré de la ligne SK menée par le sommet du cône dans le plan du triangle par l'axe, & parallele au diametre de la section, est au rectangle des parties de la base du triangle par l'axe, prolongée autant qu'il est nécessaire; comme le quarré du diametre DE est au quarré de son conjugué.

COROLLAIRE II.

522. Il suit encore de-là que l'on a $EM \times MD : PM^2 :: EF \times FD : AF \times FB$; car à cause des triangles semblables EMN, EFA; on aura

$EM : MN :: EF : FA$; & à cause des triangles semblables MDO, BDF ; $MD : MO :: DF : FB$; donc en multipliant par ordre on aura $EM \times MD : MN \times MO :: EF \times FD : FA \times FB$. mais à cause du cercle dont ON est le diametre $MN \times MO = PM^2$: donc en substituant on aura $EM \times MD : PM^2 :: EF \times FD : FA \times FB$.

Corollaire. III.

523. Il suit des deux derniers corollaires, que les diametres conjugués sont toujours égaux dans le cercle ; & que les quarrés des ordonnées sont égaux aux rectangles de leurs abscisses ; car dans le cas où la section est un cercle, les lignes SK & AK deviennent paralleles & infinies : donc le quarré SK^2 & le rectangle $AK \times KB$ deviennent égaux, & dans le cas du second corollaire, les lignes AF, EF deviennent paralleles & infinies aussi bien que les lignes FD, FB ; donc les rectangles $EF \times FD$, $FA \times FB$ deviennent égaux ; ainsi $PM^2 = EM \times MD$.

Corollaire IV.

524. Si l'on suppose encore une autre ellipse eld parallele à la premiere & dont le diametre ed rencontre la base du triangle par l'axe en f, on en déterminera le parametre que nous désignerons par p, en faisant la même analogie $SK^2 : AK \times KB :: de : p$; donc si l'on appelle P le parametre du diametre DE, on aura $DE : P :: de : p$, puisque les deux premiers

rapports des proportions qui déterminent, les parametres sont égaux. Donc toutes les ellipses coupées dans un cône par des plans paralleles entr'eux sont des figures ou ellipses semblables, puisque leurs diametres sont proportionels à leurs parametres.

COROLLAIRE V.

525. Il suit encore de-là que si l'on mene par le sommet du cône & un point quelconque d'une ellipse une droite quelconque, cette ligne passera par tous les points semblablement placés dans toutes les ellipses coupées dans le même cône par des plans paralleles entr'eux. Ainsi la ligne qui passe par le foyer ou le centre d'une ellipse & par le sommet du cône, passera aussi par les foyers ou les centres de toutes les ellipses semblables & paralleles à la premiere.

SCHOLIE.

526. Il suit de-là, que si l'on a les deux axes d'une ellipse ou seulement l'axe & un foyer, ou bien encore l'axe & son parametre, on pourra toujours couper dans un cône quelconque une ellipse égale à la proposée. Car la proportion du dernier Théorême suffit pour résoudre le problême. Ceux qui sont tant soit peu au fait de l'application de l'algebre à la Géométrie pourront s'exercer à la solution de ce problême, qui est nécessairement du second degré, on fera attention, qu'en supposant que l'axe est donné avec son parametre; il faut commencer dans

un cône scalêne par déterminer, comme pour la parabole, le plan du triangle par l'axe perpendiculaire au plan de la base du cône; afin que les ordonnées soient d'équerre avec l'axe. Si l'on n'a qu'un diametre & son parametre, il faudra encore, pour fixer le problême, que l'on connoisse l'angle des ordonnées, & l'on pourroit encore par le secours de la même proportion parvenir à la solution du problême dans ce cas qui seroit le plus compliqué.

PROPOSITION XVI.

Théorême.

527. *Si l'on coupe un cone* ASB(*fig.* 155) *de maniere que le diametre de la section* DPG, *rencontre le côté* SB *du triangle par l'axe, au de-là du sommet par rapport à la base du même triangle, la section sera une hyperbole.*

Démonstration.

Par un point quelconque *M* du diametre de la section, soit mené un plan qui coupe le triangle par l'axe dans la ligne *NO* parallele à la base du même triangle, & le plan de section dans une ligne *PM* parallele à la section *GF* du plan de section avec celui de la base. Il est évident que la figure *NPO* sera un cercle dont le diametre sera la ligne *ON*, & dont *PM* sera l'ordonnée. Cela posé, à cause des triangles semblables *DMN*, *DFA*; *DM*:*MN*::*DF*:*FA*; & à cause des triangles *EMO*, *EFB* on aura aussi *EM*:*MO*:: *EF*:*FB*; donc en multipliant par ordre *EM* × *EM*:*MN* × *MO*:: *DF* × *EF*:*FA* × *FB*; mais à

cause des cercles NPO, AGB; $PM^2 = MN \times MO$; & $FG^2 = FA \times FB$: donc en substituant ces valeurs & alternant, on aura au lieu de la derniere proportion, $DM \times EM : DF \times EF :: PM^2 : FG^2$; d'où il suit que la courbe est une hyperbole, puisque les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les rectangles de leurs abscisses. C. Q. F. D.

Corollaire.

528. Il suit de-là, que si l'on suppose un cône opposé au premier par le sommet & qu'on prolonge le plan coupant, jusqu'à ce qu'il coupe le nouveau cône terminé par un cercle parallele à la base du premier; la section sera l'hyperbole opposée à la premiere. La démonstration seroit entierement la même, puisque les triangles *Dmo*, *Dfb*; *Emn*, *Efa* sont toujours semblables, & donnent les mêmes proportions. Donc ces courbes sont précisément les mêmes que celles que nous avons démontré dans le troisieme livre; & elles en ont toutes les propriétés.

Proposition XVII.

Théorême.

529. *Si par le sommet* S *du cône dans le plan du triangle par l'axe (fig. 155) on mene une droite* SK *parallele au diametre de la section, & qu'on fasse cette proportion* $SK^2 : AK \times KB :: DE : EH$; *je dis que cette ligne sera le parametre du diametre* DE.

DÉMONSTRATION.

A cause des triangles semblables BKS, BFE on aura $SK : KB :: EF : FB$, & à cause des triangles semblables KAS, FAD aussi semblables, $SK : AK :: DF : FA$; donc en multipliant par ordre, on aura $SK^2 : AK \times KB :: EF \times DF : FB \times FA$, mais à cause du cercle AGB & de l'hyperbole dont FG est une ordonnée; $EF \times DF : FB \times FA$ ou $FG^2 :: DE^2 : LI^2$, en supposant LI diametre conjugué à DE, & par la nature du parametre $DE^2 : LI^2 :: DE^2 : EH^2$, donc puisque la suite des rapports égaux n'a pas été interrompu; $SK^2 : AK \times KB :: DE : EH$, d'où il suit évidemment que cette ligne est le parametre. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. I.

530. Il suit de-là que toutes les hyperboles paralleles entr'elles & coupées dans un même cône sont des figures semblables, puisque les lignes homologues sont proportionnelles; car si l'on imagine une autre courbe quelconque parallele à la premiere, on démontreroit de la même maniere que le rapport du diametre au parametre est celui de SK^2 à $AK \times KB$, ce qui est suffisant pour en déduire cette vérité.

COROLLAIRE II.

531. Il suit encore de-là que si par le sommet S & un point quelconque d'une hyperbole on mene une droite indéfinie, cette droite passera par tous les points semblablement placés dans toutes les hyperboles possibles paralleles à

la premiere ; & réciproquement, si une ligne passe par deux points semblablement placés dans deux hyperboles semblables & paralleles entr'elles ; cette ligne passera par le sommet *S*. Cette vérité se déduit immédiatement du premier corollaire. On peut donc établir, qu'en général dans une section conique, une ligne droite qui passe par le sommet du cône & par un point de cette section ; passera par tous les points semblablement placés dans toutes les sections paralleles entr'elles. Ainsi la propriété de l'axe du cône qui passe par les centres ou foyers de tous les cercles paralleles à la base, devient générale & s'étend à toutes les sections coniques.

COROLLAIRE. III.

532. Si la ligne *SK* est moyenne proportionelle entre les parties *AK* & *KB*, le parametre sera égal au diametre ; d'où il suit que l'hyperbole est équilatere. On peut encore conclure de cette proposition, que dans un cône dont le triangle par l'axe à unangle aigu au sommet. On ne peut couper aucune hyperbole équilatère ; car il est aisé de se convaincre, que dans un triangle tel que *ASB* aucune ligne comme *SK* menée du sommet à la base ne peut être moyenne entre les parties *AK* & *KB*, que l'angle *ASB* ne soit droit ou obtus.

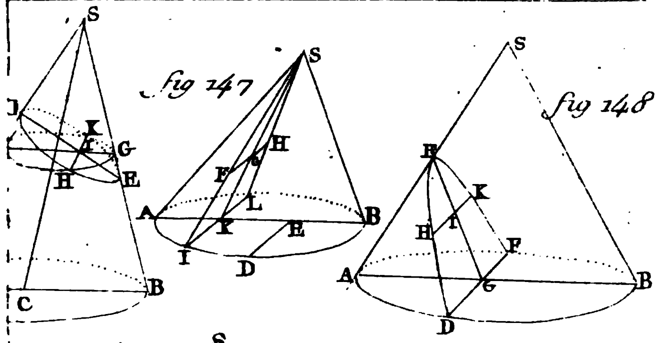
COROLLAIRE IV.

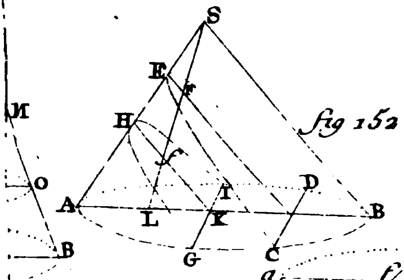
533. Si l'on regarde l'hyperbole équilatere comme la plus grande possible, on peut par le

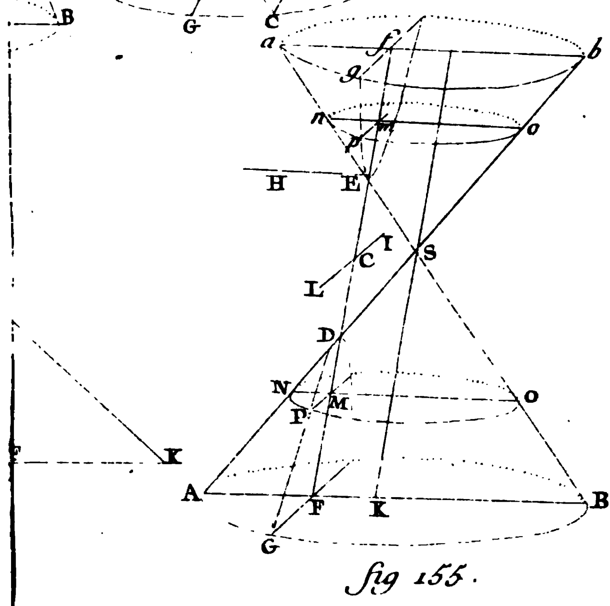
secours de cette proportion couper dans un cône donné la plus grande hyperbole possible, c'est-à-dire celle qui approche le plus de l'hyperbole équilatère. Pour cela, il n'y a qu'à déterminer une ligne SK qui soit telle que le quarré de SK, soit le plus petit possible & le rectangle de AK par KB le plus grand possible; par exemple, si le cône est droit, & qu'on suppose la ligne SK perpendiculaire à la base AB, cette ligne sera la plus petite qu'on puisse mener du sommet à un point de la base du triangle par l'axe & le rectangle de AK par KB, sera le plus grand possible, puisque cette ligne est divisée en deux également par la ligne SK dans la supposition présente, donc le rapport de $AK \times KB$ à SK^2 approchera le plus qu'il sera possible de l'égalité; donc le parametre sera aussi le plus grand qu'il est possible par rapport au diametre, & partant l'hyperbole sera la plus approchante de l'hyperbole équilatère.

COROLLAIRE V.

534. Si la ligne DE diametre de l'hyperbole devient parallele à l'un des côtés du cône; la ligne SK se confondra avec le côté SB, la partie KB devient zéro, & partant le rectangle de AK par $KB = AK \times 0 = 0$, donc le rapport du diametre au parametre sera celui de SB^2 à zéro; d'où il suit évidemment que la courbe qui est dans ce cas une parabole devient la plus petite hyperbole possible; & que la parabole peut être réellement prise pour une hyperbole dont le diametre est infini.


fig 147
fig 148
S
K
I
G
H
E
B
C
A
F
L
D


fig 152
S
E
H
f
A
L
K
I
D
B
G
C
M
O


fig 155.
a
f
b
g
n
m
o
p
H
E
I
S
C
L
D
N
M
O
P
A
F
K
B
G

COROLLAIRE. VI.

535. On pourroit encore faire usage de cette proposition pour couper dans un cône une hyperbole dont les axes ou les diametres seront donnés de grandeur, & le problême seroit toujours susceptible de deux solutions; tant que les diametres ou les axes proposés ne donneront pas un angle des asymptotes plus grand que celui de la plus grande hyperbole possible qu'on puisse couper dans le cône proposé: si les diametres ou les axes sont ceux de la plus grande hyperbole possible, les deux racines de l'équation seront égales: dans le cas d'un angle plus grand, le problême seroit impossible pour le cône proposé.

536. *N.B.* Il faut bien remarquer que quand nous parlons de la plus grande hyperbole possible, on n'entend pas celle qui a les deux plus grands diametres possibles, mais en général, celle dont l'angle des asymptotes est le plus près d'un droit, dans un cône qui a l'angle *ASB* aigu. De ce genre sont toutes les hyperboles formées par des plans paralleles au triangle par l'axe, dans un cône droit, ou par des plans perpendiculaires à la base du cône.

DÉFINITION.

537. Si par le point *K* où la ligne *SK* parallele au diametre de l'hyperbole rencontre la base du triangle par l'axe (*fig.* 156), on mene une droite *IKL* parallele à la commune section *FH* du plan

çoupant & de la base, cette ligne sera appellée *directrice* de la section *FDH* & si par la ligne *SK* & la ligne *IKL*, on fait passer un plan *ISL*; ce plan sera nommé *le plan de la directrice.*

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

538. *Supposant toutes choses comme dans la définition précédente; si par les points I, L extrémités de de la directrice, on mene les tangentes* MI, NL *au cercle qui sert de base au cône, prolongées jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en* O, *sur la base du triangle par l'axe aussi prolongée; & si par les lignes* SI, MIO; SL, NLO *on fait passer deux plans prolongés autant qu'il sera nécessaire, je dis que les lignes* CM, CN *dans lesquels ils rencontreront le plan de la section* FDH *seront les asymptotes de cette courbe*

DÉMONSTRATION.

Imaginons encore un plan *PDQo*, qui passe par le sommet *D* de l'hyperbole, & qui soit parallele à la base du cône; ce plan coupera les plans *CMO*, *CNO* dans les lignes *Po*, *Qo*, qui se trouveront paralleles aux lignes *MO*, *NO*; & l'on démontrera aisément que ces mêmes lignes seront tangentes au cercle *Dibl* que ce même plan coupe dans le cône, dans ses points *i*, *l* extrémités de la commune section du plan de ce cercle avec celui *SIL* de la directrice. La ligne *PDQ* étant dans le plan de la section *DFH*,

ſera perpendiculaire à la ligne *D.b*, & par conſéquent tangente en *D*; cela poſé on aura $DP^2 = Pi^2$ par la propriété des tangentes du cercle; & dans la baſe, on aura pareillement par la propriété des ſécantes *MH* & de la tangente *MI*, $MH \times MF = MI^2$; mais nous avons dêja vû que les lignes *MI*, *Pi* ſont paralleles, & les lignes *MP*, *Ii* le ſont auſſi, puiſqu'elles ſont les ſections de plans paralleles ſur un troiſiéme plan; donc *IMPi* eſt un parallelogramme, donc $MI = Pi$; donc $DP^2 = MF \times MH$; on fera voir de la même maniere que le rectangle d'une autre ligne telle que *mfgh* parallele à la ligne *MFGH*, ſera égal au quarré de la même ligne *DP*; d'où il ſuit évidemment que les lignes *CM*, *CN* ſont les aſymptotes; car il n'eſt pas moins évident que les lignes *DP*, *DQ*; *Pi*, *Ql* ſont toutes égales entr'elles. C. Q. F. D.

OBSERVATION.

539. Nous avons ſuppoſé que les lignes *lo*, *io* qui ſont les ſections des plans *CMO*, *CNO* avec le plan *PDQo* ſont tangentes aux extrémités de la double ordonnée *il*, qui eſt la ſection de ce même plan avec celui de la directrice. Si l'on avoit quelque difficulté là-deſſus, voici comme on peut le démontrer. Par hypotheſe les lignes *IO*, *LO* ſont tangentes aux points *I*, *L*, & ſe rencontrent en *O* ſur le prolongement du diametre *RO*. Suppoſons que du ſommet *S* au centre *R* du cercle de la baſe du cône, on ait

mené la ligne *SR*, cette ligne passera par le point *r*, centre du cercle *Dibl*, parallele à la base, & l'on aura à cause des triangles semblables *SRK*, *Srk*; *RK* : *rk* :: *SK* : *Sk*; & à cause des triangles *SKB*, *Skb* aussi semblables, on aura *SK* : *Sk* :: *KB* : *kb*, donc *RK* : *rk* *KB* : *kb* & *componendo* *RK* : *rk* :: *RK*+*KB* ou *RB* : *rk*+*kb* ou *rb*, & à cause des triangles semblables *SRO*, *Sro* on aura *SR* : *Sr* :: *RO* : *ro* donc les lignes *RK*, *RK*, *RB*, *RO*; seront proportionnelles aux lignes *rk*, *rb*, *ro* donc puisque l'on a à cause de la tangente *IO*, *RK* : *RB* :: *RB* : *RO* on aura aussi *rk* : *rb* :: *rb* : *ro*, d'où il suit que la ligne *io* est tangente en *l*; puisque le point *i* est à la surface du cône, & qu'il est l'extrémité de l'ordonnée *ki*.

COROLLAIRE I.

540. Il suit de cette proposition, que la ligne *Oo* commune section des plans *MPoO*, *NQoO* passe nécessairement par le point *S* sommet du cône, qu'elle est dans le plan du triangle par l'axe, qui divise les éléments de la section *FDH* en deux parties égales, & que le point *C* où elle va aboutir ainsi que les lignes *MP*, *NQ* est le centre des hyperboles opposées.

COROLLAIRE II.

541. Il suit encore de-là qu'une ligne comme *MI* prise sur le prolongement de la tangente *MIO*, & comprise entre le plan de la directrice, & celui de la section est le demi-diametre conjugué au demi-diametre *DC*; cela est évident,

parceque nous avons démontré dans l'hyperbole sur les proporiétés des diametres conjugués par rapport aux asymptotes.

COROLLAIRE III.

542. Si le triangle par l'axe est isocele, & la section *FDH* perpendiculaire à la base du cône, le plan de la directrice sera aussi un triangle par l'axe, la directrice *IL* sera un diametre, les lignes *MI*, *NL* seront paralleles ; & dans ce cas les lignes *CSO*, *GKO* le seront aussi ; d'où il suit que la ligne *CS* sera le demi-axe conjugué à l'axe *DE* de la section *FDG*. C'est ce que l'on pourroit démontrer directement comme il suit. Le triangle par l'axe étant isocele, & les lignes *EDG*, *SK* paralleles & perpendiculaires à la base *AB* du même triangle ; le triangle *ESD* sera aussi isocele ; la ligne *CS* qui va du sommet au milieu de la base *DE* sera donc perpendiculaire à cette base & par conséquent parallele à la base *AB*. Donc les triangles *ECS*, *EGB* seront semblables ainsi que les triangles *DCS*, *DGA* : les premiers donnent $EG : GB :: EC : CS$ & les seconds donnent aussi $GD : GA :: DC : CS$, donc *en multipliant par ordre* $EG \times DG : GB \times GA :: EC \times DC : CS^2$, mais à cause du cercle $GB \times GA = GF^2$, & les lignes *EC*, *CD* étant égales, $EC \times DC = DC^2$, donc on aura $EG \times GD : FG^2 :: DC^2 : CS^2$: d'où il suit évidemment que les lignes *DC*, *CS* sont les demi-axes conjugués des hyperboles opposées.

COROLLAIRE IV.

543. Si l'on imagine que l'angle *DGA* soit égal à l'angle *SBA*, l'hyperbole deviendra une parabole dans ce cas, les points *I*, *L* de la directrice se confondent en un seul point en *B*; les lignes *MI*, *NL* n'en font plus qu'une parallele à la ligne *FGH*, qui ne pourra rencontrer le plan de la section qu'à une distance infinie de part & d'autre, d'où il suit que la parabole ne peut avoir d'asymptote, puisque les lignes qui déterminent les asymptotes ne peuvent jamais se rencontrer, lorsque l'hyperbole devient une parabole.

REMARQUE.

544. Si l'on a bien conçu tout ce qui précede, on verra que les démonstrations des sections coniques considérées dans le cône s'étendent tout d'un coup, & avec autant de facilité aux diametres comme aux axes de chacune de ces courbes. De cette maniere, l'on n'est point obligé de commencer par les axes, pour passer aux diametres, comme on a fait dans les trois premiers livres ; ce passage est toujours difficile pour les commençants, lorsque l'on examine ces courbes sur un plan, de quelque méthode que l'on se serve, analytique ou synthétique. Mais il faut bien remarquer que l'on n'est redevable de ce grand avantage qu'à la définition que nous avons donnée du cône, en le déterminant de la maniere la plus générale. *Appollonius*

de *Perge* est le premier des anciens Géometres qui ait donné cette importante définition. Il est plus que probable que ce n'étoit pas sans avoir de vûes bien générales sur les sections coniques, qu'il a préféré cette définion à toutes les autres & qu'il a mieux aimé prendre un cône scalene qu'un droit, parceque le cône droit ne peut donner que les propriétés de ces courbes par rapport à leurs axes, puisque dans ce cône, les ordonnées des sections, seront toujours perpendiculaires à leurs diametres. J'ai insisté sur cette partie d'autant plus volontiers que ceux qui ne voudroient avoir que les principales proprié és des sections coniques trouveront dans tout ce qui précede, un traité complet & très-élémentaire de chacune de ces courbes considérées par rapport à leur diametre & à leur axes. J'ai supposé qu'on étoit parfaitement au fait de ce qui s'appelle rencontre des plans, si l'on n'avoit pas cette connoissance, il seroit impossible d'entendre cette partie, où l'on suppose tous les théorêmes qui ont rapport à cela ; ce qui se trouve dans les éléments d'Euclide de M *Ozanam* ou de M. *Rivard*, est plus que suffisant pour tout ce que nous avons vû. Ceux qui seront curieux d'en voir d'avantage peuvent consulter le sixieme livre *du Traité analytique de M. le Marquis de l'Hopital*, & même passer s'ils le veulent au grand Traité *in-folio* de *M. De la Hire* sur cette partie. Je me flatte qu'ils seront en état de comprendre cet ouvrage

qui a passé pour un des plus compliqués dans ce genre, & auquel ce dernier livre pourroit servir d'introduction. Nous allons examiner dans ce qui reste les corps composés d'éléments qui croissent dans la raison des quarrés des ordonnées d'une section conique quelconque ; & ensuite nous dirons quelque chose des courbes qui résultent des différentes sections d'un conoïde quelconque par un plan disposé comme l'on voudra. Cette partie peut être utile à ceux qui sont obligés de rechercher les courbes qui se trouvent dans ces sections de différents solides ou corps qui se pénetrent mutuellement, comme cela arrive dans la coupe des pierres.



DE LA

DE LA SOLIDITÉ des corps dont les éléments croissent dans la raison des quarrés des ordonnées d'une section conique quelconque ;

ET DES COURBES que l'on peut couper dans les conoides formés par la révolution d'une section conique autour d'une axe de mouvement.

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

545. *Un paraboloide quelconque* ABIDC, (*fig.* 157) *droit ou oblique, & dont la base est un polygone régulier ou irrégulier quelconque, est la moitié du prisme de même base & de même hauteur.*

DÉMONSTRATION.

Nous concevons la paraboloide dont il s'agit ici formé par une infinité de tranches paralleles d'une épaisseur infiniment petite, qui seront toutes semblables entr'elles, & qui auront pour lignes homologues les doubles ordonnées *PQ*, *EF* d'une parabole *EPIQF* tracée dans un plan perpendiculaire au plan de la base du solide *AID*. Comme ces tranches qui sont les éléments du même corps, ont toutes une même épaisseur, elles seront entr'elles dans la raison de leurs bases, c'est-à-dire, que les éléments du paraboloide croissent comme les

quarrés des ordonnées *PQ*, *EF* ou comme les polygones semblables construits sur ces lignes, comme des lignes homologues : donc puisque, par la propriété principale de la parabole, les quarrés des ordonnées sont comme leurs abscisses correspondantes ; les éléments seront aussi dans le même rapport & croîtront comme leurs distances au sommet de la courbe ; d'où il suit qu'un paraboloïde quelconque, se doit mesurer de la même maniere qu'un triangle *ABC* (*fig.* 158), puisque dans l'un & dans l'autre les éléments croissent dans le rapport des distances au sommet. Mais le triangle est la moitié du produit de sa base par sa hauteur, donc aussi le paraboloide sera la moitié du produit de sa base par sa hauteur *IG*, c'est-à-dire, la moitié du prisme de même base & de même hauteur. C. Q. F. D.

†Corollaire. I.

546. Si la base est un cercle, le paraboloide deviendra un corps auquel on a donné le nom de *fuseau parabolique* ; donc le fuseau parabolique droit ou oblique est la moitié du cilyndre de même base & de même hauteur.

Corollaire II.

547. Donc deux paraboloides quelconques sont égaux, lorsqu'ils ont même base & même hauteur quelque soit la figure de leur base & la position de leur axe à l'égard de la même base.

COROLLAIRE III.

548. Il suit de cette génération d'un paraboloide quelconque, que toutes les courbes *IKA*, *IND* qui vont du sommet *I* du paraboloide aux angles de la base, sont des paraboles : car en supposant, comme cela doit être, que le plan de la parabole génératrice *EPIQF* soit perpendiculaire au plan de la base, les points *R*, *H* où son diametre rencontre les tranches paralleles & semblables, seront des points semblablement placés dans chaque tranche ; & si l'on mène aux angles *A*, *K* les lignes *RK*, *HA* ; ces lignes formeront des triangles semblables *PRK*, *EHA*, qui donnent $KR^2 : AH^2 :: PR^2 : EH^2$; mais $PR^2 : EH^2 :: IR : IH$; donc $KR^2 : AH^2 :: IR : IH$. d'où il suit que la courbe *AKI* est une parabole. Il n'est pas moins évident que les parametres de ces différentes paraboles sont entr'eux comme les quarrés des lignes *AH*, *EH*. On démontreroit de même, que si l'on coupe un paraboloide quelconque par un plan qui passe par l'axe *IH*, les courbes que ce plan formera sur la surface de ce corps, seront des paraboles. Donc dans un fuseau parabolique droit ou oblique, toute courbe résultante d'un plan coupant qui passe par l'axe sera une parabole égale à la génératrice.

LEMME.

pour la proposition suivante.

549. *Soit une ellipse* aBAb, *dont* Aa, Bb *sont*

deux diametres conjugués, si par l'extrémité A *l'on mene la tangente* hAH, *dont les les parties* Ah, AH, *soient chacunes égales au demi-diametre* CB *conjugué à* CA; *& qu'après avoir tiré par le centre les lignes* CH, Ch *on mene une ordonnée quelconque* DF, *qui coupe la ligne* CA *en* E; *je dis que l'on aura toujours* $DE^2 + DF^2 = AH^2$.

DÉMONSTRATION.

Par la propriété des diametres conjugués de l'ellipse, on a cette analogie, $DF^2 : CA^2 - CD^2 :: CB^2$ ou $AH^2 : CA^2$; donc $DF^2 = \frac{CA^2 - D^2}{CA^2} \times AH^2 = AH^2 - \frac{CD^2 \times AH^2}{CA^2}$; & à cause des triangles semblables CAH, CDE on aura $CA^2 : AH^2 :: CD^2 : DE^2 = \frac{AH^2 \times CD^2}{CA^2}$: donc $DF^2 + DE^2 = AH^2 - \frac{CD^2 \times AH^2}{CA^2} + \frac{CD^2 \times AH^2}{CA^2} = AH^2$ ou CB^2. C.Q.F.D.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

550. *La solidité d'un ellipsoide quelconque, est les deux tiers du prisme de même base & de même hauteur.* (*fig.* 160)

DÉMONSTRATION.

Nous allons d'abord démontrer cette proposition sur un ellipsoide composé d'une infinité de petits plans circulaires qui ont pour rayons les ordonnées à un diametre quelconque *Aa* d'une ellipse *ABab*; & la proposition se trouvera démontrée généralement, en applicant ce que nous aurons dit des surfaces circulaires



à toutes les autres figures semblables régulieres ou irrégulieres.

DÉMONSTRATION.

Imaginant l'ellipsoide formé comme on vient de l'expliquer ; conçevons ce même corps, inscrit a un cylindre de même base & de même hauteur ; il est visible que le rayon *AH* du cercle qui sert de base à ce cylindre, sera le demi-diametre *CB* de l'ellipse. Il n'est pas moins évident que le demi-ellipsoide *BAb* est égal au cylindre *BHLhb* moins l'écuelle *AHBFAfbh*. Donc tout se réduit à trouver la solidité de cette écuelle, & à prouver qu'elle est le tiers du cylindre de même base & de même hauteur ; ou, ce qui est la même chose, qu'elle est égale au cône oblique *HCh* qui a même base & même hauteur. Cela posé, *par le lemme précédent*, on a $DF^2+DE^2=AH^2$ ou DG^2 : donc $DE^2=DG^2-DF^2$; & si au lieu des quarrés faits sur *DE*, *DF* & *DH*, on prend les cercles dont ces lignes feroient les rayons ; on aura le cercle de *DE* égal au cercle de *DG*, moins le cercle de *DF* ; c'est-à-dire, que l'élément du cône *hCH* est égal à la couronne faite sur *FG* ou à l'élément correspondant de l'écuelle ellipsoide ; d'ailleurs le nombre des éléments est le même pour l'un & pour l'autre, étant mesuré par la même perpendiculaire. Donc l'écuelle ellipsoide est le tiers du cylindre de même base & de même

hauteur; donc l'ellipsoide est les deux tiers du même cylindre. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

551. Puisque les cylindres de même base & de même hauteur, sont égaux; il s'ensuit que les ellipsoides formés sur différentes ellipses, qui auront un diametre comme *Bb* égal, & dont les diametres comme *aA*, peuvent être compris entre paralleles, à cause de leur différentes inclinaisons, sont égaux entr'eux, & à l'ellipsoide formé par la révolution d'une demi-ellipse, dont les axes seroient *Bb* & la perpendiculaire *Kk*, autour du même axe *Kk*.

COROLLAIRE. II.

552. Si l'on applique notre démonstration à des figures quelconques, au lieu de prendre des cercles, on verra aisément qu'un ellipsoide sera toujours les $\frac{2}{3}$ du prisme circonscript de même base & de même hauteur quelque soit la figure de cette base.

COROLLAIRE. III.

553. Si les diametres conjugués deviennent égaux & à angles droits, le solide deviendra une sphére, donc la sphére est les deux tiers du cylindre de même base & de même hauteur: comme il est démontré dans tous les élémens.

COROLLAIRE IV.

554. Il suit encore de-là que l'on pourra

toujours trouver la solidité d'un ségment, ou d'un secteur ellipsoide quelconque, sans avoir recours aux ségments ou secteurs sphériques correspondans d'une sphére qui auroit pour diametre la perpendiculaire *Kk*. Par exemple, si je veux toiser le segment ellipsoide *FAf*, je vois que tout se réduit à retrancher la solidité du cône tronqué *EHhe*, du cylindre *GHhg* de même base & de même hauteur ; car ce cône tronqué est toujours égal à la portion de l'ecuelle ellipsoide de même hauteur. Comme les calculs que l'on feroit obligé de faire pour toiser les segments ou secteurs d'ellipsoide pourroient devenir un peu compliqués en nous servant de la synthése, & que d'ailleurs les propositions que nous venons de démontrer sont assés évidentes par elles-mêmes, nous nous servirons de la méthode analytique dans les problêmes suivants, afin de donner à nos solutions toute la généralité dont elles sont susceptibles.

PROPOSITION III.

PROBLÊME I.

555. *Trouver la solidité d'un segment de sphéroide elliptique, dont les éléments croissent comme les cercles faits sur les ordonnées* DF *au diametre* CA. (*fig.* 160)

SOLUTION.

Du centre *C* soit abaissée la ligne *CK* perpendiculaire à la tangente *AH*; nous ferons $CK = a$, *AH* ou $CB = b$, les indéterminées $CP = x$, $DF = y$. Et comme nous avons

besoin des cercles décrits sur les rayons AH ou DE &c. nous supposerons :: $m:n$, le rapport du rayon à la demi-circonférence. Cela posé, nous avons fait voir dans l'article précédent que la solidité du segment ellipsoide est égale à celle du cylindre correspondant $GHhg$, dont on auroit ôté celle du cône tronqué, qui est égal en solidité à un cône qui auroit une base égale à la somme des bases inférieures & supérieures, plus une base moyenne géométrique entre les deux dernieres; laquelle se trouve en multipliant le contour de l'un par le rayon de l'autre. Je commence donc par chercher la solidité de ce corps; pour cela, à cause des triangles semblables CDE, CAH; ou CPE, CKH, on aura $CK : CP :: AH : DE$ & analytiquement $a : x :: b : \frac{bx}{a} = DE$; donc pour avoir la demi-circonférence du cercle qui a pour rayon DE & de celui qui a pour rayon AH on fera $m : n :: \frac{bx}{a} : \frac{nbx}{am}$ & encore $m : n :: b : \frac{bn}{m}$; en multipliant ces demi-circonférences par les rayons correspondants, on aura les surfaces des cercles décrits avec les rayons AH & DE, dont l'une sera $\frac{nbbxx}{ma^2}$, & l'autre $\frac{nbb}{m}$ ou $\frac{na^2bb}{ma^2}$. La surface du cercle moyen géométrique entre les deux sera $\frac{nbbx}{am}$ ou $\frac{na^2bx}{ma^2}$. Donc le cône tronqué sera égal à $\frac{nbbxx + na^2b^2 + nab^2x}{ma^2} \times \overline{\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}x}$, puisque la ligne PK est évidemment $a - x$. La solidité du cylindre correspondant sera $\frac{nb^2}{m} \times \overline{a - x}$, ou en réduisant à la dénomination ma^2, &

mettant $\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}x$, $\frac{3n\,x^2\,b^2}{m\,a^2} \times \overline{\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}x}$: ainsi retranchant le solide du cône tronqué du cylindre correspondant, on aura pour la solidité du segment ellipsoide que nous désignerons par *FAf*, $FAf = \frac{3n\,a^2\,b^2 - n\,b^2\,x^2 - n\,a^2\,b^2 - n\,a\,b^2\,x}{m\,a^2} \times \overline{\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}x}$, ou en réduisant

$$\frac{2n\,a^2\,b^2 - n\,b^2\,x^2 - n\,a\,b^2\,x}{m\,a^2} \times \overline{\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}x}.$$

ou $\frac{n\,b^2}{m\,a^2} \times \overline{2a^2 - x^2 - ax} \times \frac{a - x}{3}$. D'où l'on peut déduire une regle générale pour trouver la solidité de tous les segments ellipsoides imaginables formés sur un ellipsoide droit ou oblique. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

556. Si l'on fait attention à l'expression que nous venons de trouver on verra que l'opération qu'il faudra faire pour toiser le solide d'un segment d'ellipsoide quelconque se réduit à ce qui suit. *D'abord on ajouterale cercle fait sur le rayon* CP *représenté par* $\frac{nx^2}{m}$ *au cercle moyen géométrique entre celui qui a pour rayon* CK, *& celui qui a pour rayon* *CP*, *lequel est représenté par* $\frac{nax}{m}$; 2°. *On ôtera cette somme du double du cercle fait sur* CK *représenté par* $\frac{2na^2}{m}$. 3°. *On multipliera cette différence par le tiers de la perpendiculaire* CK *moins celui de la fleche* PK ; *& enfin* 4°. *On multipliera ce nouveau produit par le rapport du quarré du diametre* CB *ou* AH *au quarré de la perpendiculaite* CK. *Tout ce raisonnement est déduit immédiatement de la formule* $FAf = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{2na^2 - nxx - nax}{m} \times \frac{a-x}{3}$.

COROLLAIRE II.

557. Dans la sphére, la perpendiculaire *CK*

& le diametre *AH* ou *CB* sont égaux & à angles droits : donc la solidité d'un segment sphérique quelconque peut être représentée par $\overline{\frac{2na^2 - nxx - nax}{m}} \times \frac{a-x}{3}$; car le rapport $\frac{b^2}{a^2}$ devient l'unité, & par conséquent doit disparoître.

Corollaire III.

558. Si dans la formule générale précédente $\frac{nb^2}{ma^2} \times \overline{2a^2 - x^2 - ax} \times \frac{a-x}{3}$, on fait $x = 0$, on aura par la réduction des termes où x se trouve $\frac{nb^2}{ma^2} \times 2a^2 \times \frac{a}{3} = \frac{2nab^2}{3m}$, c'est-à-dire, que la solidité du demi-ellipsoide, est égale aux deux tiers du cylindre circonscrit de même base & de même hauteur.

PROPOSITION IV.

Problême II.

559. *Trouver la solidité d'un secteur de sphéroide elliptique (fig. 160).*

Solution.

On cherchera d'abord le segment *FAf* par le problême précédent & ensuite on ajoûtera à cette solidité celle du cône *CFf* dont la hauteur est *CP*, x ; & qui a pour base le cercle dont le rayon est l'ordonnée *DE* au diametre *CA*. Seulement, on peut remarquer qu'en déterminant le quarré de cette ordonnée *DE*, il n'est pas nécessaire de se servir du rectangle des abscisses *AD*, *aD*; mais que l'on peut leur substi-

tuer les abſciſſes KP, kP enſorte qu'ayant toujours conſervé les mêmes dénominations, on aura $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$ ou $\frac{aabb - bbxx}{aa}$, ſi l'on multiplie cette valeur de yy par $\frac{n}{m}$, on aura la ſolidité du cône qu'il faut ajoûter au ſegment ellipſoïde pour avoir le ſecteur demandé. C. Q. F. T.

SCHOLIE.

560. Si l'on compare l'ellipſoïde a ſa ſphére décrite ſur la ligne Kk comme diametre, on trouvera que l'ellipſoïde eſt à cette ſphére comme le quarré de CK au quarré de CB. Car, *par la ſeconde propoſition* (*art.* 550), l'ellipſoïde eſt les deux tiers du cylindre Nh & la ſphere ſeroit auſſi les deux tiers du cylindre dont la hauteur ſeroit Kk & dont la baſe auroit la même ligne pour diametre. Donc ces cylindres ſont entr'eux comme les baſes puiſqu'ils ont une même hauteur; donc ils ſont comme les cercles faits ſur CK & CB ou comme les quarrés de ces lignes. Si au contraire on compare l'ellipſoïde à la ſphere décrite ſur le diametre Bb; cette ſpere ſera les deux tiers du cylindre fait ſur CB, comme rayon, & l'ellipſoïde eſt les deux tiers du cylindre ſur la même baſe & dont la hauteur eſt CK. Donc ces cylindres, ou la ſphere & l'ellipſoïde, ſeront entr'eux comme leurs hauteurs c'eſt-à-dire comme CK à CB. Il ſuit encore de-là que l'on pourroit concevoir un ellipſoïde quelconque droit ou oblique, comme provenant d'une ſphere dont on auroit allongé ou

accourci toutes les ordonnées proportionnellement dans le rapport de *CB* à *CK* ; il faut entendre la même chose des parties correspondantes de ces deux corps, c'est-à-dire des segments & secteurs ellipsoïdes comparés aux segments ou secteurs sphériques correspondants dont les éléments suivent le même rapport.

PROPOSITION V.

THÉOREME.

561. *La solidité d'un hyperboloïde quelconque* NIEKO (*fig.* 161.) *est égale à celle d'un cône tronqué* ACDB, *moins un cylindre de même hauteur, & dont la base est un cercle qui a pour rayon le demi-diametre* ED *conjugué au demi diametre* SE.

DÉMONSTRATION.

Par un point *P* quelconque du diametre *SPQ* soit menée une ordonnée *HIPKL* terminée aux asymptotes *CS*, *DS* que l'on suppose accompagner l'hyperbole *NIEKO*. On aura par la propriété principale des diametres $HP^2 - PI^2$ ou $HI \times IL = CE^2$, & si l'on substitue aux quarrés HP^2, PI^2 & CE^2 les cercles faits sur les mêmes lignes comme rayons ; on aura le cercle de *PH* moins le cercle de *PI* égal au cercle de *CE* ; c'est-à-dire la couronne *IHRLK* égale à la base du cylindre. Donc si l'on suppose le cylindre composé d'une infinité de petits solides paralleles qui ont une épaisseur infini-

ment petite & de même l'écuelle hyperbolique composée d'une infinité de couronnes de même épaiseur ; les éléments du cylindre seront toujours égaux aux éléments correspondants de l'écuelle ellipsoïde. Donc la somme des uns sera égale à la somme des autres ; c'est-à-dire, que le cylindre est égale à l'écuelle ellipsoïde de même base & de même hauteur. Or il est évident que l'hyperboloïde est la différence de cône tronqué *ACDB* à l'écuelle *CANEOBD*. Donc l'hyperboloïde sera aussi égale au cône tronqué moins le cylindre de même base & de même hauteur. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

562. Il faut entendre la même chose de tout autre corps hyperbolique dont les éléments seroient des figures semblables régulieres qui croîtront comme les quarrés des ordonnées de l'hyperbole *NIEKO* : alors au lieu d'un cône on auroit une pyramide ; au lieu du cône tronqué on auroit une pyramide tronquée ; & enfin, au lieu du cylindre on auroit un prisme de même hauteur & dont la base seroit le polygone fait sur la ligne *CD*, comme ligne homologue aux figures semblables qui forment les éléments de l'hyperboloïde proposé ; soit que les lignes *CE*, *ES* soient les axes de l'hyperbole génératrice, ou seulement des diametres.

COROLLAIRE II.

563. Si l'on fait attention à ce que nous

venons de démontrer sur les propriétés de l'hyperboloïde, & ce que nous avons expliqué ci-devant sur la solidité d'un ellipsoïde quelconque, on verra que la même formule peut donner les solidités de ces deux corps, en changeant seulement les lignes ; car pour avoir une portion d'ellipsoïde, il faut retrancher le cône tronqué de même hauteur, & dont la base est un cercle décrit avec le diametre *AH*, (*fig.* 160) il faut dis-je, retrancher ce cône du cylindre de même base & de même hauteur, au lieu que dans l'hyperboloïde; c'est le cylindre qu'il faut ôter du cône tronqué.

Corollaire III.

564. Il n'est pas moins évident que l'on toisera de la même maniere, la solidité d'une portion d'hyperboloïde renfermée entre deux plans paralleles, tels que *HRLH* & *ATBA*; en ôtant du cône tronqué le cylindre de même hauteur & dont la base est toujours le cetcle fait sur le demi-diametre *ED*.

Corollaire IV.

565. Donc on pourra toujours déterminer une portion d'hyperboloïde égale à la solidité d'un ellipsoïde proposé.

Définitions.

I.

566. Nous appellerons du nom *Cortoide*, tout solide dont les éléments sont composés des

cercles faits sur les ordonnées d'une section conique quelconque.

II.

567. Nous appellerons *Diametre* du conoïde une ligne menée du sommet de la parabole génératrice au centre de la base, laquelle est aussi un diametre de cette parabole.

PROPOSITION VI.

THÉOREME.

568. *Si l'on coupe un conoide quelconque par un plan de quelque maniere qu'il soit disposé, il en résultera toujours une section conique de même nature que celles que nous avons éxaminées dans les livres précédents.*

Cette proposition peut avoir deux cas dans un conoide quelconque ; car le plan coupant coupant est placé de maniere qu'il soit parallèle au diametre du conoïde, ou bien il est disposé de maniere qu'il coupé ce même diametre.

DEMONSTATRION POUR LE PARBOLOIDE.

I. CAS.

569. Soit un paraboloïde *SLAKB* (*fig.* 162) composé d'une infinité de plans circulaires, qui croissent dans la raison des quarrés des ordonnées *AC*, *NG* de la parabole génératrice *ANSB*. Nous avons dêja vû que tout plan qui coupera ce corps en passant par lé diametre *CS* donnera une parabole *LMSIK*, qui aura le même

parametre que la premiere *AESB* (*art.* 548).
Imaginons dans le cercle de la base une ligne *RT* parallele au diametre *ACB*, & une ligne au diametre *LCDK*, & une ligne ou diametre *LCDK* perpendiculaire à la ligne *RT*. Cette ligne divise nécessairement *RT* en deux parties égales. Présentement par le diametre *CS* & la ligne *LCK*, imaginons un plan *LSIK*, & par la ligne *RT* un autre plan *RET* parallele au plan *ASB*, qui rencontre le premier *LSK* dans la ligne *ED*. Si l'on conçoit encore un nouveau plan *MNIO* parallele à la base, ce plan sera, par la définition du conoïde parabolique, un cercle décrit du rayon *NG*. Puisque les plans *MNI*, *LAK* sont paralleles, les lignes *GI*, *CK* qui représentent les communes sections de de ces plans avec le plan *LSK* seront paralleles; & de même les lignes *PQ*, *RT* qui sont les intersections des mêmes plans paralleles avec le plan *RET*, seront aussi paralleles; de plus, puisque *CK* est un diametre du cercle de la base perpendiculaire par hypothese à *RT*; *GI* sera aussi un diametre du cercle *MNPI* & partant divisera *PQ* en deux également en *H*; donc *EHD* commune section du plan *SEK* avec le plan *RET*, sera un diametre de la courbe *RET* reste à faire voir que cette courbe est une parabole. A cause des cercles *LARK*, *NMPI*, on a $RD^2 = LD \times DR$, & $PH^2 = MH \times HI$, donc on aura cette proportion $RD^2 : PH^2 :: LD \times DK : MH \times HI$. Mais la courbe *LSK* étant une parabole

parabole dont les lignes *CS*, *DE* sont des diametres & les lignes *EK*, *MI* des doubles ordonnées paralleles entr'elles, on aura par l'article 87 $LD \times DK : MH \times HI :: ED : EH$; donc aussi $RD^2 : PH^2 :: ED : EH$; donc la courbe *RET* est une parabole. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

570. Il suit évidemment de cette démonstration que la parabole *RET* a le même parametre du diametre *ED* que celui du diametre *CS* de la parabole génératrice. Car on a $PH^2 = MH \times HI = GI^2 - GH^2$ ou $GI^2 - EF^2$, en supposant dans le plan *CSK* l'ordonnée *EF* parallele au diametre *CK*. Donc si l'on appelle *P* le parametre du diametre *CS*, on aura à cause des ordonnées *EF*, *GI*; $GI^2 - EF^2 = (GS - FS) \times P = FG$ ou $EH \times P$: donc $PH^2 = EH \times P$; c'est-à-dire que le parametre du diametre *ED* est égal à celui du diametre *CS*.

COROLLAIRE II.

571. Si l'on transporte les ordonnées *PH*, *RD* sur les ordonnées correspondantes *NG*, *AC* dans la parabole *ANS*, en prenant les lignes $pG = PH$ & $rC = RD$; il en résultera une nouvelle parabole entierement égale à la premiere *EPR* qui aura conséquemment le même parametre que la parabole *ANS* : on aura donc pour l'une $NG^2 = GS \times P$, & pour la seconde $pG^2 = FG \times P$; donc $NG^2 - pG^2$ ou $Np \times pO = GS \times P - GF \times P$ ou $FS \times P$, ou enfin EF^2, puisque cette ligne est ordonnée à la parabole *SEK* : donc les rectangles $Np \times pO$, $Ar \times rB$ sont tou-

jours égaux entr'eux & au quarré de la constante *EF*; donc puisque les ordonnées *RD*, *PH* vont toujours en augmentant, les parties *Np*, *Ar* doivent toujours diminuer, sans cependant pouvoir jamais être nulles : donc les paraboles *SNA*, *Fpr* s'aprochent toujours les unes des autres, sans jamais pouvoir se toucher. Donc elles sont asymptotes les unes des autres.

Ce corollaire est une démonstration complette & directe de cette propriété de la parabole que nous avions déduite des propriétés des hyperboles au numero 421. On voit de plus ici què ces courbes ont les unes par rapport aux autres, les propriétés de l'hyperbole par rapport à ses asymptotes; & qu'elles pourroient se décrire de la même maniere.

II Cas.

572. *Si l'on coupe un conoide parabolique de maniere que le plan coupant rencontre le diametre du conoide dans quelque point; la courbe qui en résultera sera encore une section conique.*

Démonstration du II Cas.

Soit un conoide parabolique quelconque *ASB* (*fig.* 163) coupé par un plan *DKEL* qui rencontre le diametre *CS* du conoide au point *R*. Par ce même diametre faisons passer un plan *ASB*, qui coupe la courbe *DKE* dans une ligne *DE*. Imaginons encore deux plans paralleles à la base *ACB*, dont les communes sections avec le plan *ASB* soient représentés par les lignes *MN*, *OP*; & qui rencontreront le plan *DKEL* dans les lignes *KL*, *IH* qui

seront nécessairement paralleles entr'elles & en même temps des ordonnées des cercles *MKNL*, *OHPI*. Il est évident que les lignes *MN*, *OP*, *DE* sont des sécantes intérieures à la parabole *ASB*. Nous avons démontré(*art.*82) qu'en nommant *P* & *p* les parametres des diameteres qui divisent en deux parties égales les sécantes *MN*, *OP* & la troisieme *DE*, on auroit $MF \times FN : DF \times FE :: P : p$ & $OG \times GP : DG \times GE :: P : p$; donc on aura $MF \times FN : DF \times FE :: OG \times GP : DG \times GE$. Mais à cause des cercles *MKN*, *OHP* on a $MF \times FN = KF \times FL$, & $OG \times GP = GH \times GI$: donc en mettant ces rectangles au lieu des précédents, on aura $KF \times FL : DF \times FE :: GH \times GI : DG \times GE$. Donc, par les propriétés des sécantes de l'ellipse, cette courbe *DKEI* sera une ellipse, puisque les rectangles de deux lignes paralleles entr'elles, sont entr'eux comme les rectangles des abscisses correspondantes. C. Q. F. D.

DÉMONSTRATION.

POUR L'ELLIPSOIDE. I. CAS.

573. *Soit un ellipsoide* ANBO (*fig.*164) *composé d'une infinité d'éléments circulaires qui croissent comme les cercles formés sur les ordonnées* RO, *MS du diametre AB de l'ellipse génératrice. Si l'on coupe ce solide par un plan* EHIDKL *parallele au diametre* AB, *je dis que la courbe qui résultera de cette section, sera une section conique.*

DÉMONSTRATION.

Par le diametre *AB* de l'ellipsoïde, conçevons un plan *ADEB*, qui coupe le premier

plan coupant dans une ligne DE laquelle est nécessairement parallele au diametre AB ; la courbe qui naîtra de la section de l'ellipsoïde par le plan qui passe par le diametre AB, sera une ellipse comme il est évident par la génération de ce corps. Cela posé, par deux points quelconques G, F de la ligne DE dans le plan $DANB$ soient menées les ordonnées $OGRP$, $MFSN$ au diametre AB, & par ces lignes imaginons encore deux plans paralleles entr'eux, & disposés de telle maniere à l'égard du diametre AB, que les sections coniques $OIPK$, $MHNL$ soient des cercles ou des éléments de l'ellipsoïde : ces cercles rencontreront nécessairement le premier plan coupant $ELDI$ en deux lignes IK, LH qui seront paralleles entr'elles. Cela posé, il est visible que les lignes OP, MN & la ligne DE sont des sécantes intérieures de l'ellipse $ODANB$ dont les deux premieres sont paralleles aux ordonnées du diametre AB & la troisieme est parallele au diametre AB lui - même; on aura donc (*art.* 212) $OG \times GP : MF \times FN :: EG \times GD : EF \times FD$; mais à cause des cercles OKP, MLN on a $OG \times GP = GK \times GI$, & $MF \times FN = LF \times FH$: donc en mettant ces rectangles à la place des précédents, on aura $GK \times GI : LF \times FH :: EG \times GD : EF \times FD$. D'où il suit que la courbe faite par le plan coupant DHE est une ellipse. C. Q. F. D.

II Cas.

574. Si le plan coupant DHE rencontroit

le diametre en quelque point, on démontreroit précisément de la même maniere que la courbe qui en résulteroit, est une ellipse; puisque dans cette hypotése les rectangles de deux sécantes quelconques paralleles entr'elles, seroient entr'eux comme les rectangles des parties d'une même droite coupée par les deux premieres. Donc on ne peut couper que des ellipses dans une ellipsoïde quelconque.

DÉMONSTRATION.

POUR L'HYPERBOLOIDE. I. *CAS.*

575. *Si l'on coupe un hyperboloide par un plan parallele au diametre* AB (*fig.* 165) *la courbe qui en résultera sera une hyperbole.*

DÉMONSTRATION.

Nous imaginerons toujours l'hyperboloide formé comme les autres conoides d'une infinité de cercles qui ont pour rayon les ordonnées de l'hyperbole génératrice. Par le diametre *AB* je suppose qu'on ait fait passer un plan qui coupe le premier plan coupant *HDKL* dans une ligne *DF*, qu'il faut conçevoir prolongée en *E*, jusqu'à la rencontre de l'hyperboloide opposé. La courbe *MOAPN* sera évidemment une hyperbole. Je suppose encore deux plans élémentaires *OIP*, *MHN* paralleles entr'eux. Cela posé, il est évident que les lignes *EDF*, *OP*, *MN* sont des sécantes de l'hyperbole *MDAN*; ainsi l'on aura $OG \times GP : MF \times FN :: EG \times GD : EF \times FD$; mais à cause des cercles *OIP*, *MHN* on a $IG \times GK = OG \times GP$, & $HF \times FL = MF \times FN$; donc dans le plan

coupant HDL on aura $IG \times GK : HF \times FL :: EG \times GD : EF \times FD$; d'où il suit évidemment que la courbe est une hyperbole. C. Q. F. D.

II Cas.

576, Si le plan coupe le diametre de l'hyperboloide, la courbe ne sera plus une hyperbole mais une ellipse. Ce qui se démontreroit avec la même facilité par le moyen des sécantes intérieures de l'hyperbole. On peut donc conclure en général que de quelque maniere que l'on coupe un conoide, il en résultera toujours une section conique de même genre que celles que nous avons examinées dans les trois premiers livres. C. Q. F. D.

Corollaire. I.

577. Dans le paraboloide & dans l'hyperboloide, on pourra toujours trouver deux sortes de courbes ; sçavoir une du genre elliptique & une du même genre que la courbe génératrice du conoide proposé: au lieu que dans l'ellipsoide, on ne peut couper que des courbes du genre elliptique.

Corollaire II.

578. On remarquera encore, que toutes les fois que le plan coupant est parallele au diametre du conoide, chaque courbe qui résulte de la section est semblable à celle que l'on détermineroit par un plan qui seroit mené par le diametre conoide parallelement au premier plan coupant. Ainsi dans le paraboloide & l'hyperboloide toutes ces courbes seront asymptotes les unes par rapport aux autres.

Fin du cinquieme livre & des sections coniques.

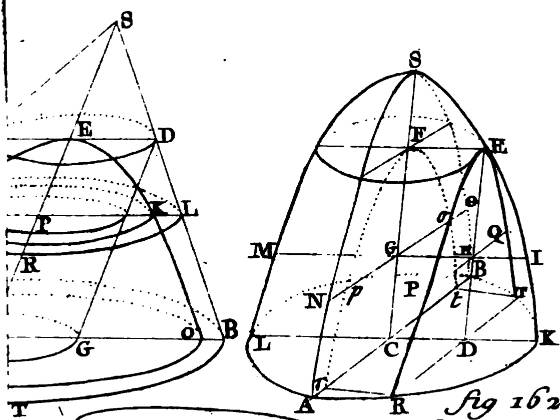


fig 162

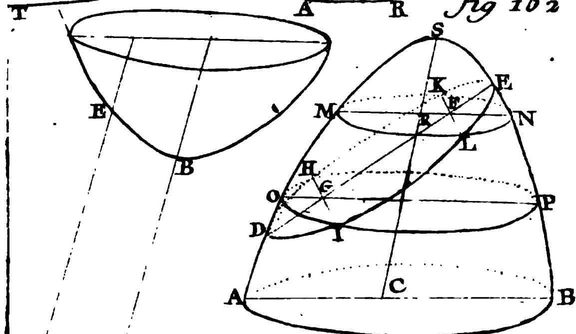


fig 163

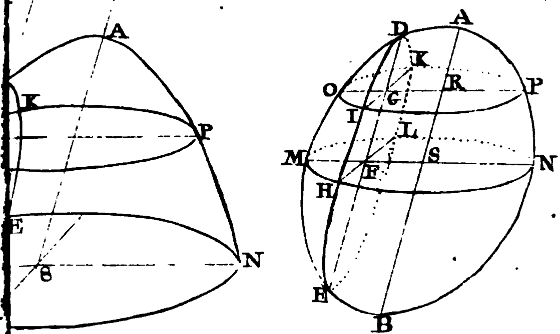


fig 164

SUPPLEMENT
AUX SECTIONS CONIQUES.

COMME les démonſtrations que nous avons données ſur les propriétés des ſécantes intérieures & extérieures quoique générales, pourroient cependant paroître un peu diffciles ; & que d'ailleurs en travaillant à cet ouvrage, j'en ai trouvé une qui m'a paru plus ſimple que toutes celles que je connois : je crois qu'on la verra ici avec d'autant plus de plaiſir qu'elle devient un corollaire très-naturel d'une propriété commune à toutes les ſections coniques que je n'ai point vue dans les auteurs les plus connus. Je l'ai dêja fait entrevoir en traitant les ptopriétés des hyperboles aſymptotes ; & quoique ce que j'en ai dit ſoit plus que ſuffiſant pour des perſonnes un peu avancées, je me ſuis néantmoins déterminé à la donner encore ici, ſoit pour ne rien laiſſer à déviner aux commençants, ſoit pour la préſenter dans toute la généralité qui lui convient, & enfin pour faire quelques obſervations que je n'aurois pas pû faire alors ſans m'écarter de mon ſujet.

THÉORÊME GÉNÉRAL.
pour toutes les ſections coniques.

579. *Si par un point* B *pris au-dedans d'une ſection*

conique quelconque (*fig.* 166, 167, 168 *&* 169) *on fait passer sur le même plan une courbe semblable à la premiere; & qu'ensuite, ayant mené par le même point la tangente* BD *à la courbe décrite, & terminée au périmetre de l'autre; on tire par tant de points* O, o *que l'on voudra des droites* MON, m o n *paralleles à cette tangente & terminées de part & d'autre au contour de la premiere courbe; je dis que l'on aura toujours* $MO \times ON = BD^2$.

DÉMONSTRATION
pour la Parabole. (*fig.* 166)

Toutes les paraboles étant des figures semblables, celles qui sont décrites avec le même parametre le sont aussi : cela posé, ayant fait passer par le point *B* un diametre *ABP* & mené à ce diametre l'ordonnée *BD* qui déterminera l'angle des ordonnées, puisqu'elle est supposée tangente en *B*; supposant de plus que *P* soit le parametre de la parabole proposée & de celle à décrire; par un point quelconque *P* du diametre *ABP* je mene l'ordonnée *OP* que je prolonge de part & d'autre, jusqu'à ce qu'elle rencontre la premiere parabole aux points *M*, *N*; il est évident que cette ligne est une double ordonnée du diametre *ABP* pour les deux paraboles; donc on aura pour la premiere $MP^2 = (AB + BP) \times P$, & pour la seconde, $PO^2 = BP \times P$; donc $MP^2 - PO^2$ ou $MO \times ON = (AB + BP) \times P - BP \times P$, ou en réduisant $MO \times ON = AB \times P = BD^2$. C. Q. F. D.

REMARQUE.

580. Si les deux paraboles ne sont pas décrites avec le même parametre, on ne trouveroit pas précisément le même rapport; mais les rectangles $MO \times ON$ seroient toujours dans un rapport constant, comme il est aisé de s'en convaincre.

DÉMONSTRATION.

pour l'Ellipse.

581. Par le centre C & le point B (*fig.* 167) ayant mené un diametre $ABCba$, avec son ordonnée BD qui détermine, comme dans le cas précédent, l'angle des ordonnées de la courbe à décrire avec le diametre Bb ; & supposant une droite MPN qui coupe les deux ellipses & qui est parallele à BD, on aura pour la premiere $MP^2 : CA^2 - CP^2 :: CF^2 : CA^2$; & pour la seconde $PO^2 : CB^2 - CP^2 :: CG^2 : CB^2$; mais à cause que ces courbes sont supposées semblables, les diametres conjugués correspondants sont proportionels ; donc $CF^2 : CA^2 :: CG^2 : CB^2$; donc $MP^2 : PO^2 :: CA^2 - CP^2 : CB^2 - CP^2$; donc *dividendo* $MP^2 - PO^2 : MP^2 :: CA^2 - CP^2 - CB^2 + CP^2 : CB^2 - CP^2$, ce qui se réduit à $MO \times ON : MP^2 :: CA^2 - CB^2 : CB^2 - CP^2$; mais par la propriété des ordonnées BD, PM on a cette proportion $BD^2 : PM^2 :: CA^2 - CB^2 : CB^2 - CP^2$; donc on aura encore $MO \times ON : MP^2 :: BD^2 : MP^2$; donc, puisque

les conséquents sont égaux, les antécédents le seront aussi & donneront $MO \times ON = BD^2$. C. Q. F. D.

REMARQUE.

582. Il est aisé de voir que la même propriété doit aussi se trouver dans le cercle. La démonstration n'en devient que plus simple par l'égalité constante des diametres conjugués. Voyez la figure 168.

DÉMONSTRATION pour l'Hyperbole.

583. Par le point donné *B* (*fig.* 169) & le centre *C* de l'hyperbole *MAN* ayant mené le diametre *CAB* avec son ordonnée *BD*, qui détermine toujours l'angle des ordonnées de l'hyperbole à décrire avec le même diametre ; je mene à cette ligne prolongée jusqu'à l'asymptote en *G*, la parallele *AF* aussi terminée à l'asymptote. Il est évident que les lignes *CA*, *CB* ; *AF*, *BG* sont les diametres conjugués correspondants des hyperboles *MAN*, *OBQ*. Cela posé, concevant toujours une droite *MN* terminée de part & d'autre au périmetre de la premiere hyperbole, & parallele à la tangente *BD*, on aura cette proportion pour l'ordonnée *MP*, $MP^2 : CP^2 - CA^2 :: CA^2 : AF^2$; & pour l'ordonnée *PO*, $PO^2 : CP^2 - CB^2 :: CB^2 : BG^2$; donc puisque les hyperboles sont semblables (*hyp.*) leurs diametres correspondants sont proportionels. On

aura donc, $CA^2 : CB^2 :: AF^2 : BG^2$; donc $MP^2 : PO^2 :: CP^2 - CA^2 : CP^2 - CB^2$. Donc *dividendo* $MP^2 - PO^2 : MP^2 :: CP^2 - CA^2 - CP^2 + CB^2 : CP^2 - CA^2$, ou en réduisant $MO \times ON : PM^2 :: CB^2 - CA^2 : CP^2 - CA^2$; mais à cause des ordonnées BD, PM on a $CB^2 - CA^2 : CP^2 - CA^2 :: BD^2 : PM^2$; donc $MO \times ON : PM^2 :: BD^2 : PM^2$; donc $MO \times ON = BD^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

584. On démontreroit de la même maniere que le rectangle $MQ \times QN$ est toujours égal au quarré de la constante BL ou de son égale BD (*fig.* 166) & de même dans toutes les autres figures. Donc 1°. les parties MO, NQ comprises entre les deux courbes sur une même droite sont toujours égales entr'elles. 2°. Puisque les ordonnées PO, po vont toujours en augmentant en s'éloignant du sommet de la courbe, il faut que les parties MO, QN ou mo, qn diminuent continuellement; d'où il suit que ces courbes sont asymptotes les unes par rapport aux autres. C'est ce que nous avons dêja démontré pour la parabole & pour l'hyperbole. Dans l'ellipse (*fig.* 167) la plus petite distance des deux courbes, mesurée sur des paralleles à BD est FG différence des deux demi-diametres CF, CG conjugués aux deux demi-diametres CA, CB.

COROLLAIRE. II.

585. Il suit encore de-là que si deux lignes droites

se coupent en quelque point au-dedans ou au-dehors d'une section conique quelconque, les rectangles des segments de ces lignes seront toujours dans un rapport constant. Nous avons déja démontré cette proposition sur l'hyperbole, nous allons en faire la démonstration sur la parabole & sur l'ellipse, afin de faire voir la facilité avec laquelle cette proposition qui est la plus générale des sections coniques, se déduit de la précédente.

DÉMONSTRATION.

pour la Parabole.

586. Soient deux droites AB, MN (*fig.* 170) qui se coupent en un point O. Par ce point je conçois une parabole ODF semblable à la premiere & décrite avec le même parametre. Par le point I milieu de la sécante AB, je mene le diametre IDC qui coupe cette nouvelle parabole au point D, par lequel je mene la tangente DE. Pareillement par le point L milieu de la sécante MN, je mene le diametre LFK qui coupe la nouvelle parabole au point F par lequel je mene la tangente FG. Cela posé, par la proposition générale que nous venons de démontrer, on aura $AO \times OB = DE^2$, & de même $MO \times ON = FG^2$. Mais les droites DE, FG étant des ordonnées aux diametres CD, KF dont nous désignerons les parametres par P, p; on aura $DE^2 = CD \times P$ & $FG^2 = KF \times p$. Donc $AO \times OB : MO \times ON :: CD \times P : KF \times p$. De plus, si l'on fait attention que les lignes ou diametres CI, KL sont paralleles & infinis & que les rectangles de ces diametres par

les lignes finies CD, KF doivent être égaux entr'eux, il s'en suit que les lignes CD, KF sont aussi égales. Donc $AO \times OB : MO \times ON :: P : p$. C'est ce qui a été dêja démontré directement sur la parabole. *Livre premier. art.* 18.

COROLLAIRE.

586. Il suit de cette démonstration que les parties des diametres comprises entre deux paraboles asymptotes sont toutes égales entr'elles. Il suit encore de-là que la demi-couronne parabolique $DOSTGCKNXZVD$ est égale au rectangle $TSZX$; car les éléments de cette couronne & du rectangle sont tous égaux entr'eux, & la ligne TX en mesure le nombre de part & d'autre.

DÉMONSTRATION.

pour l'Ellipse.

587. Par le point O où se coupent les sécantes MN, concevons une ellipse DOG (*fig.* 171) semblable à la premiere. Par le point I milieu de la sécante AB & le centre C, soit mené le diametre CIV, & son demi-conjugué CE parallele à AB. De même par le point K milieu de la sécante MN & le centre C soit mené le diametre RCS & son demi-conjugué CL. Aux points D, G où ces diametres coupent l'ellipse intérieure, soient menées les tangentes à cette courbe DF parallele à MN & GH parallele à AB. Cela posé, on a par la proposition générale $AO \times OB = GH^2$ & $MO \times ON = DF^2$. Mais les tangentes GH, DF sont aussi des ordonnées aux diametres TV, RS; donc on aura pour la premiere ordonnée $GH^2 : CT^2 - CG^2 :: CE^2 : CT^2$,

& pour la seconde $DF^2:CR^2-CD^2::CL^2:CR^2$. Mais puisque ces courbes sont semblables, les diametres CT, CR & leurs homologues CG, CD sont proportionels. Donc $CT^2:CR^2::CG^2:CD^2$, donc $CT^2-CG^2:CT^2::CR^2-CD^2:CR^2$. Donc $GH^2:DF^2::CE^2:CL^2$; donc enfin $AO\times OB:MO\times ON::CE^2:CL^2$. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

588. On démontreroit de même les propriétés des sécantes extérieures dans toutes ces courbes; en imaginant une courbe semblable à la proposée, & qui passeroit par le point où les sécantes extérieures se rencontreroient. Quand à la description de ces courbes semblables qui passent par un point donné, elle se déduit encore immédiatement de cette propriété générale. Pour cela il n'y a qu'à mener par le point donné sur le plan de la courbe des droites *BPpb*, *CPpc*, *APpa*, *DPpd* (*fig.* 172, 173 & 174) terminées de part & d'autre à la courbe donnée, & si l'on prend les parties $ap=AP$, $pb=PB$, $pd=PD$ &c. chacune à sa correspondante, tous les points *p* déterminés par cette opération seront à la courbe demandée. Tout ceci ne souffre aucune difficulté. Il n'est pas moins évident (*fig.* 174) que chaque point *p* déja trouvé peut servir à en déterminer autant d'autres qu'il sera nécessaire: enfin cette description des courbes asymptotes & semblables n'est pas différente de celle des hyperboles entre leurs asymptotes, & elle est fondée sur les mêmes principes.

FIN.

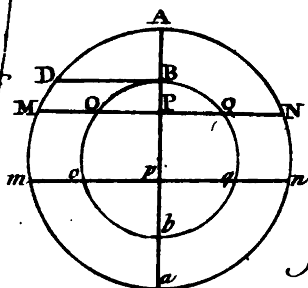


fig. 168

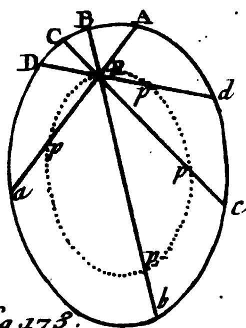


fig. 173.

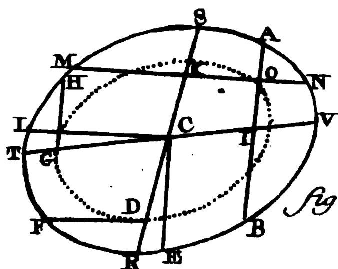
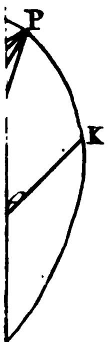


fig 171.



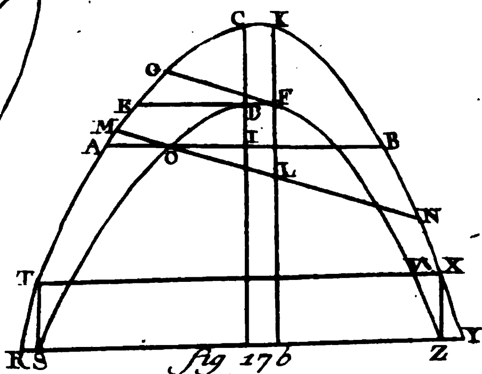


fig. 176

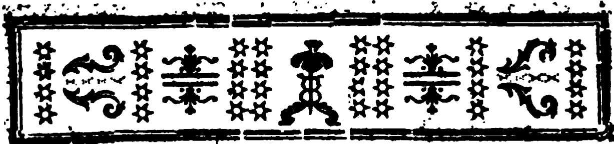


TABLE DES MATIERES.

AVERTISSEMENT.

Les chiffres marquent seulement les articles & non les pages.

DE LA PARABOLE. Liv. I.

un angle égal à un angle proposé, pourvû qu'il ne soit pas plus grand qu'un droit.

24. *Par un point de la parabole, on ne peut mener qu'une tangente.*

25. *Toutes les tangentes à la parabole rencontrent l'axe & les diametres de cette courbe.*

26. *Trouver une tangente qui fasse avec l'axe un angle moindre que quelqu'angle donné que ce soit.*

27. *La partie de l'axe comprise entre le sommet de la parabole & la rencontre du même axe par une tangente, est égal à l'abscisse correspondante à cette ordonnée.*

28. *Si l'on mene par le sommet une tangente à ce point, & une droite quelconque terminée à un diametre, parallelement à la tangente menée par l'origine de ce diametre; les parties de ce diametre comprises entre son origine & les rencontres de ces droites sont égales.*

29. *La ligne double de l'abscisse & comprise entre l'ordonnée & la rencontre de l'axe par une tangente est appellée* Sou-tangente.

30. *Un point étant donné sur la parabole; mener une tangente à ce point.*

31. *D'un point pris sur le prolongement de l'axe, mener une tangente à la parabole.*

32. *Une parabole, son axe, son foyer, sa directrice & un point sur le même plan étant donnés; mener une tangente qui passe par ce point.*

33. *Ce problême a toujours deux solutions tant que le point n'est pas sur la courbe.*

34. *L'angle compris entre un diametre & une*

segment

Fin de la Parabole.

DE L'ELLIPSE LIV. II.

201. *Le quarré d'une ordonnée à un diametre quelconque, est égale au rectangle de l'une de ses abscisses par le parametre moins un rectangle semblable à celui de ce diametre par son parametre.*

202. *Lemme pour la proposition suivante.*

203. *Si deux droites paralleles à deux diametres conjugués se coupent dans un point, au-de-dans ou au-de-hors de l'ellipse, les rectangles de ces lignes seront proportionels aux quarrés des diametres conjugués qui leur sont paralleles.*

204, 205, 206. *On démontre dans ces articles les propriétés des sécantes intérieures & extérieures de l'ellipse, dans le cas où les diametres paralleles à ces sécantes ne sont point conjugués l'un à l'autre, c'est - à - dire, dans le cas le plus général.*

207. *Les rectangles de deux sécantes quelconques sont entr'eux comme les quarrés des tangentes qui leur sont paralleles.*

208. *Dans le cercle toutes sécantes intérieures ou extérieures s'y doivent couper en parties réciproques. Cas où cela peut arriver aussi dans l'ellipse.*

209. *Proprieté des sécantes par rapport aux parametres. On en déduit les propriétés de ces lignes dans la parabole.*

210. *Le quarré d'une tangente est au rectangle d'une sécante par sa partie extérieure, comme les quarrés du diametre parallele à cette tangente est au quarré de celui qui est parallele à la sécante.*

211. *On déduit de cette proposition générale les propriétés des ordonnées à un diametre quelconque. Définition générale de l'ellipse déduite de cette propriété.*

sur deux autres diametres conjugués de la même courbe.

221. *Tous les parallélogrammes formés sur deux diametres conjugués sont égaux entr'eux & au rectangle des deux axes.*

222. *Le rectangle d'un demi-diametre par la perpendiculaire abaissée de son conjugué sur lui-même, est égal au rectangle des deux demi-axes.*

223. *Si des extrémités de deux diametres conjugués, on abaisse des ordonnées à un même axe; la somme des quarrés des abscisses correspondantes à ces ordonnées, est égale au quarré du demi-axe, auquel elles ont été menées. Cette proposition est générale & doit s'entendre de tout diametre de l'ellipse.*

224. *La somme des quarrés de deux diametres conjugués est egale à la somme des quarrés des axes.*

225. *Si des extrémités de deux diametres conjugués, on mene à un diametre quelconque deux ordonnées, les produits des ordonnées par leurs abscisses seront égaux.*

226. *Le rectangle des parties d'une tangente terminée à deux diametres conjugués est égal au quarré du demi-diametre parallele à cette tangente.*

227. *Deux lignes étant données de grandeur & de position pour deux diametres conjugués d'une ellipse trouver les deux axes. On pourroit aussi par le moyen des propriétés démontrées précédemment, trouver deux autres diametres conjugués qui fissent entr'eux un angle égal à un angle donné.*

228. *On peut considérer une ellipse comme une courbe formée des ordonnées d'un cercle, allongées ou accourcies proportionnellement.*

Fin de l'ellipse.

DE L'HYPERBOLE, Liv. III.

l'angle des hyperboles conjuguées ; comme le quarré du demi-diametre parallele à cette tangente, est à celui du demi-diametre qu'elle rencontre.

336. *Ces deux propositions peuvent être regardées comme une seule.*

337. *La tangente est moyenne proportionnelle, entre les segments du diametre, lorsque ce diametre est égal au diametre parallele à la même tangente.*

338. *Si deux lignes droites terminées à une ou à deux hyperboles opposées se coupent en quelque point, au-dedans ou au-dehors de ces courbes ; les rectangles des segments de ces lignes seront entr'eux comme les quarrés des diametres qui leur sont paralleles.*

339. *Observations importantantes sur cette proposition.*

340. *Les rectangles dont on vient de parler sont entr'eux comme les quarés des tangentes qui leur sont paralleles, prises depuis les points touchants, jusqu'au point où elles se coupent.*

341. *Si l'une des sécantes devient tangente ; la proposition a encore lieu.*

342. *On déduit de cette proposition les propriétés des ordonnées à un diametre quelconque.*

343. *Cette proportion est la plus générale que l'on puisse donner sur l'hyperbole.*

344. *On en déduit aussi les propriésés des asymptotes. Une asymptote peut être regardée comme deux diametres conjugés qui tombent l'un sur l'autre.*

345. *Observation sur cette proposition*

346. *Définition des* sécantes asymptotiques. *Elles ont les mêmes propriétés que les sécantes hyperboliques.*

Fin de l'Hyperbole.

DE LA DESCRIPTION

DES SECTIONS CONIQUES

LIVRE IV.

à une distance infinie du centre.

431. *L'ellipse est une courbe fermée & terminée. Elle ne peut avoir aucun point entre son sommet & la directrice sur le prolongement de l'axe.*

432. *Solution pour l'hyperbole. Cette courbe a aussi deux directrices.*

433. *Dans une hyperbole les distances de chaque point de la courbe aux foyers & à la directrice correspondante, sont toujours dans un rapport constant qui est celui des distances du sommet à la même directrice & aux foyers.*

434. *L'hyperbole a deux branches qui s'étendent à l'infini & s'éloignent continuellement l'une de l'autre.*

Propriétés communes à toutes les sections coniques déduites de la construction précédente.

435 & 436. *Toute courbe telle que les distances de chacun de ses points à un foyer & à une directrice, sont toujours dans un rapport constant; peut être appellée section conique. Ce rapport est un rapport d'égalité dans la parabole, de plus petite inégalité dans l'ellipse, & de plus grande inégalité dans l'hyperbole.*

437. *La courbe est une parabole, une ellipse, ou une hyperbole, selon que le sommet est autant, plus, ou moins éloigné de la directrice que du foyer.*

438. *Dans l'hyperbole, la courbure est en raison inverse de la distance du foyer au sommet & en raison directe de la grandeur de l'axe. La ligne droite est la derniere hyperbole possible.*

439. *Le cercle & la ligne droite sont les deux extremes des sections coniques. Pour quelle raison.*

DES SECTIONS CONIQUES *considérées dans le solide, & de la curbature des conoides quelconques.*

LIVRE V.

*

FIN.

ERRATA.

ART. 1. p. 3. *lig.* 2. supprimés les deux points p. 5. *au bas*, ou a, *lisés*, on a. art. 15. p. 6, *lig.* 2. ordonné *lis.* ordonnée. art. 25. p. 13. *lig.* 5. ; que, *lis.* pas. art. 38. p. 20, *lig.* 5. égal, *lis.* égale. art. 42. p. 21, *lig.* 2, pour solution, *lis.* pour la solution. p. 27, *lig.* 2, ou, *lis.* où. art. 25, *lig.* 2, passe, *lis.* passent. art. 77. p. 38. *lig.* 1. porobole, *lis.* parabole. p. 40, *lig.* 14 ; donc $BD^2 \times mg = gf$, *lis.* $BD \times mg = gf^2$. p. 44. *lig.* 1. du diametre, *lis.* des diametres. p. 56. *lig.* 3. égal, *lis.* égale. p. 97, art. 63 $-\frac{CT^2}{CO}$, *lis.* $\frac{CT^2}{CO}$. p. 101, *lig.* 18, $\times -\frac{CT^2}{CM^2}$, *lis.* $\times \frac{CT^2}{CM^2}$. *au bas de la* pag. 106 mettés un point après *BT*, & ôtés celui qui se trouve après *PH*. p. 107. *lig.* 11, *PAH*, *lis.* *TAH*. p. 120, *lig.* 1. *CP*, *lis.* CP^2. p. 122. *lig.* 10, CL^2, *lis.* Cl^2. p. 124, *lig.* 22, *lis.* :$EL \times LD$. p. 133. 1. *lig.* ou *lis.* où. p. 137. *lig.* 6. soit *lis.* fut. p. 137. art. 215. proposition, *lis.* proportion. art. 225. p. 150, *lig.* 6, a, *lis.* la. p. 153. art. 225. *lig.* 14. *PQ*, *lis.* *QR*. p. 160. art 229. *lig.* 3. ces *lis.* ses. art. 231. p. 173. *lig.* 5, égal, *lis.* égale. p. 168. *lig.* 11, ou, *lis.* pour. p. 171, *lig.* 16, abaisera, *lis.* abaissera. p. 177. art. 245. *lig.* 7, du cercle *Fp*, *lis.* dont *Fp*. p. 181. *lig.* 10, mettés un point après *CD*. p. 185. *lig.* 4, cq^2 *lis.* Cq^2. *Ibid.* art. 262, CM^2+CQ, *lis.* CM^2+CQ^2. p. 194. art. 274. lois, *lis.* loix. p. 196. d'une hyperboloïde, *lis.* d'un. p. 197. *lig.* 2. plusieures, plusieurs. art. 282. p. 201. *lig.* 3. une loix, *lis.* loi. p. 204.